Filtration par le poids équivariante pour les variétés algébriques réelles avec action

Fabien Priziac

ANNÉE 2012

THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1
sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne

pour le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : Mathématiques et applications

Ecole doctorale Matisse

présentée par

Fabien Priziac

Préparée à l'unité de recherche 6625 du CNRS : IRMAR
Institut de Recherche Mathématique de Rennes
UFR de Mathématiques

Filtration par le poids équivariante pour les variétés algébriques réelles avec action

Thèse soutenue à Rennes
le 28 novembre 2012

devant le jury composé de :

Ilia ITENBERG
Professeur, Univ. Pierre et Marie Curie / *rapporteur*

Georges COMTE
Professeur, Univ. de Savoie / *examinateur*

Michel COSTE
Professeur, Univ. de Rennes 1 / *examinateur*

Johannes HUISMAN
Professeur, Univ. de Bretagne Occidentale / *examinateur*

Frédéric MANGOLTE
Professeur, Univ. d'Angers / *examinateur*

Goulwen FICHOU
MCF, Univ. de Rennes 1 / *directeur de thèse*

Filtration par le poids équivariante pour les variétés algébriques réelles avec action

Introduite par B. Totaro, la filtration par le poids sur l'homologie des variétés algébriques réelles, analogue réel de la filtration par le poids de P. Deligne sur les variétés algébriques complexes, a été réalisée via un complexe de chaînes filtré par C. McCrory et A. Parusiński, qui en ont enrichi la compréhension, notamment à travers l'étude de la suite spectrale induite. Au milieu des nombreuses informations recelées par cette suite spectrale de poids, on retrouve les nombres de Betti virtuels.

Dans cette thèse, on montre l'existence d'une filtration par le poids équivariante sur l'homologie équivariante des variétés algébriques réelles munies d'une action d'un groupe fini. On la réalise par un complexe filtré et, via la construction de plusieurs suites spectrales, on effectue des avancées significatives pour extraire des invariants additifs. Lors de notre étude, on définit fonctoriellement un complexe de poids avec action et on montre qu'un résultat de découpage d'une variété Nash munie d'une involution algébrique entraîne un analogue de la suite exacte de Smith, tenant compte de la filtration Nash-constructible. A travers la construction d'un complexe de poids invariant dans le cadre d'involutions algébriques, on retrouve également les nombres de Betti virtuels équivariants de G. Fichou. Enfin, en appliquant les bons foncteurs aux résultats sur les produits de filtrations par le poids réelles de T. Limoges, on donne des résultats sur les produits de filtrations par le poids équivariantes.

Equivariant weight filtration for real algebraic varieties with action

Introduced by B. Totaro, the weight filtration on the homology of real algebraic varieties, which is a real analog to P. Deligne's weight filtration for complex algebraic varieties, has been realized via a filtered chain complex by C. McCrory and A. Parusiński, especially through the study of the induced spectral sequence. Among the several pieces of information held by this weight spectral sequence, one can recover the virtual Betti numbers.

In this thesis, we show the existence of an equivariant weight filtration on the equivariant homology of real algebraic varieties equipped with a finite group action. We realize it by a filtered complex and, via the construction of several spectral sequences, we make significative progress toward the extraction of additive invariants. During our study, we functorially define a weight complex with action et we show an analog of the Smith exact sequence, taking into account the Nash-constructible filtration, that follows from a result on the splitting of Nash manifolds with algebraic involutions. Through the construction of an invariant weight complex in the frame of algebraic involutions, we also recover G. Fichou's equivariant virtual Betti numbers. Finally, applying the relevant functors on T. Limoges' results on the products of real weight filtrations, we give results on the products of equivariant weight filtrations.

Remerciements

Au moment de faire le point sur le tourbillon des émotions dans lequel on a été ballotté au cours de la construction d'une thèse, c'est sans nul doute le sentiment de gratitude qui prédomine. Dans les moments de tension où les briques s'empilent en un édifice encore branlant. Dans les moments de soulagement lorsque l'on constate qu'un théorème tient debout. Dans les moments de déception lorsque tout s'écroule après une nuit. Dans les moments d'angoisse lorsque le chantier n'avance plus ou lorsqu'il faut recommencer tout un pan de mur. Dans tous ces moments, certaines personnes prennent le temps de nous écouter, nous expliquer ou nous conseiller, d'autres sont toujours là pour nous encourager, nous féliciter ou nous consoler. Les fameux "remerciements" sont ainsi le lieu d'expression de cette reconnaissance, un moment important pour leur dire enfin "Merci". Certes, d'aucun pourrait arguer qu'il existe bien d'autres manières de manifester cette gratitude, tant dans d'autres circonstances que par d'autres vecteurs. Cependant, la valeur symbolique de ce fruit du travail de doctorat, ainsi que sa pérennité, en font la parfaite occasion pour ces remerciements devant quelques dizaines de témoins-lecteurs, tout en étant l'incarnation des contributions des personnes à qui ils sont destinés. Et que celui ou celle qui me taxe de timidité me jette le premier chamallow ! Bien, le lyrisme étant à l'horloge ce que le spectre est à la table, passons au sujet proprement dit.

Je remercie en tout premier lieu mon directeur de thèse, Goulwen Fichou. Toujours disponible pour n'importe quelle interrogation, précis dans ses réponses, patient dans ses attentes, généreux dans ses explications et ses enseignements, c'est aussi pour ses qualités humaines telles que sa prévenance et sa gentillesse que j'estime que, pendant ces trois années et quelques mois, il m'aura donné à observer la véritable signification du terme anglophone "advisor". Je lui adresse mes plus sincères remerciements pour avoir parfaitement rempli ce rôle. C'est pour moi un honneur et un plaisir non dissimulés, une chance également, d'avoir été l'étudiant d'un mathématicien aussi compétent. Un grand merci également pour m'avoir fait découvrir cette belle discipline qu'est la géométrie algébrique réelle et ces adorables petits monstres que sont les singularités, ainsi que pour avoir tenté de me transmettre une partie des facettes de ses vastes connaissances et intérêts sur le sujet.

Ilia Itenberg et Clint McCrory m'ont fait le grand honneur de rapporter cette thèse. J'ai eu la chance d'assister à plusieurs exposés d'Ilia Itenberg. La compétence, la maîtrise, le savoir qui émanaient de chaque minute du discours de ce grand expert de la géométrie algébrique réelle me font considérer bien humblement mon propre travail, et je lui suis profondément reconnaissant d'avoir accepté de porter une importante attention à celui-ci. J'ai rencontré à quelques reprises Clint McCrory, lors de conférences et déplacements. L'indiscutable autorité mathématique qui se dégage de ce personnage est à la hauteur de sa sereine simplicité, et la sagacité de ses remarques à propos de cette thèse en sont pour beaucoup dans son amélioration. Mille mercis à eux deux.

Je remercie ensuite chacun des membres du jury pour avoir accepté de tenir ce rôle. Merci beaucoup à Georges Comte pour l'intérêt, les connaissances, les conseils dont il sait témoigner à propos d'un aussi large éventail de domaines mathématiques, ainsi que non-mathématiques. Merci beaucoup à Michel Coste, cet immense pilier de la géométrie algébrique réelle rennaise et française -que dis-je mondiale- qui a toujours été présent pour la moindre de mes questions, distillant la science de sa discipline dans chacune de ses explications toujours claires et enrichissantes. Merci beaucoup à Johannes Huisman, déjà l'un de mes enseignants à Brest ; j'ai découvert lors de mon M2 sa spécialité de recherche qu'il introduisait avec talent, et j'espère encore beaucoup apprendre de ce nouveau collègue. Merci beaucoup à Ilia Itenberg dont je ne paraphraserai pas les qualités déjà énoncées plus haut, mais qu'il soit remercié pour faire également partie de ce jury. Merci beaucoup à Frédéric Mangolte dont j'ai pu voir à plusieurs reprises le goût pour les belles mathématiques et une toujours plus grande ouverture vers de nouveaux champs de recherche encore en friche. Merci beaucoup enfin à Goulwen Fichou qui, non content d'avoir été un bon directeur, me fait aussi la joie d'assister à ma soutenance au tout premier rang. Bref, qu'eux six sachent mon immense gratitude pour avoir constitué l'un des meilleurs jurys que j'aurais pu souhaiter. Qu'ils sachent également qu'ils ont tous, d'une façon ou d'une autre, contribué à mon intérêt pour mon domaine de recherche en particulier, et pour les mathématiques en général.

De ce point de vue, je souhaiterais également remercier d'autres mathématiciens qui ont eu une influence notable dans ma vie d'apprenti-mathématicien. Tout d'abord, Adam Parusiński, autre puits de connaissances qui a toujours éveillé en moi, au cours de nombreuses rencontres et discussions, curiosité et intérêt, s'efforçant de répondre précisément à mes questions, m'indiquant également des erreurs dans mon travail, me permettant par de pertinentes remarques de l'améliorer, et m'aiguillant sur de nouvelles pistes de recherche pour le futur. Merci beaucoup également à Thierry Limoges, mon aîné dans la construction d'une thèse de singularités en géométrie algébrique réelle, qui aura éclairé dans mon esprit de si nombreuses notions que son influence dans la réalisation de cette thèse est indéniable. Un grand merci à Toshizumi Fukui qui m'a fait l'immense honneur de m'accueillir à l'université de Saitama lors de l'été 2010, séjour au cours duquel j'ai pu apprendre toujours plus de mathématiques, ainsi que l'utilité des climatiseurs dans des environnements extrêmes. Bien entendu, d'autres chercheuses ou chercheurs ont eu une influence, petite ou grande, sur ma perception et ma progression mathématiques ; même s'ils ne sont pas cités ici, qu'ils en soient tous remerciés.

Vient le tour de la tour (de maths). De haut niveau, l'UFR de Mathématiques et le laboratoire IRMAR n'en demeurent pas moins des lieux privilégiés pour travailler et apprendre les mathématiques, où l'on ne cesse de s'enrichir au contact d'enseignants-chercheurs passionnés et passionnants. A ce cadre confortable, se rajoutent la compétence et la gentillesse des personnels BIATOSS. Chaleureuses et accueillantes, ces personnes sont toujours prêtes à aider, expliquer, faciliter telle ou telle démarche. Je les remercie donc aussi chaleureusement qu'ils soutiennent le travail de tous. En particulier, merci à Claude Boschet, Maryse Collin, Olivier Garo, Marie-Annick Guillemer, Emmanuelle Guiot, Chantal Halet, Dominique Hervé, Véronique Le Goff, Morgane Leray, Marie-Annick Paulmier, Patrick Pérez, Elise Ramos, Hélène Rousseaux, Marie-Aude Verger. Dans cette direction, je remercie également Elodie Cottrel, la secrétaire de l'école doctorale MATISSE, ainsi que son directeur Jean-Marie Lion. Je n'oublie pas bien sûr de remercier les autres doctorants que j'ai pu côtoyer au cours de mon doctorat. S'il ne faut en citer que quelques-uns, je mentionnerai mes colocataires du bureau 610. Merci donc à Mathilde, Damian, Charles, Dmitry et Emmanuel qui auront rendu cette petite pièce si accueillante, si agréable, envahie tantôt de grands éclats de rires ou de grandes discussions, tantôt d'un grand silence studieux. Je remercie également les collègues du LTSI pour les dizaines de minutes perdues au pied de la tour de maths, au cours desquelles j'aurai tenté d'apprendre à lire le vent.

Un mot sur l'enseignement. Je suis très heureux d'avoir pu enseigner à l'Université de Rennes 1, dans des cursus et disciplines divers. J'ai apprécié de travailler avec de compétents et talentueux pédagogues, notamment ceux qui m'ont poussé à toujours mieux comprendre la matière qu'ils enseignaient alors, pour mieux l'appréhender, l'assimiler, l'adapter avant de la restituer et la transmettre aux étudiants. Je remercie d'ailleurs ces derniers pour leurs esprits vifs, intéressés, intrigués, amusés, parfois obstinés, parfois raisonnés, mais toujours sympathiques.

Je ne puis décemment point passer sous silence mon passé brestois. Tout d'abord, parce que c'est là que se trouve ma racine du mal. C'est en effet au sein de l'Université de Bretagne Occidentale que j'ai fait mes premières armes mathématiques et c'est là que se sont trouvés des enseignants qui ont continué de me donner envie (et l'envie d'avoir envie) de poursuivre dans cette voie. Un très grand merci à eux. Parmi ceux-ci, je remercie en particulier Eric Rannou dont les conseils et les encouragements, à un moment où je connus l'échec -ès maths-, ont été l'une des contributions décisives à mon actuelle situation. Ensuite, c'est en ce lieu que se trouve dès à présent mon avenir proche. On m'a fait l'honneur de m'y recruter pour un poste d'ATER, et j'espère sincèrement ne pas décevoir mes anciens enseignants devenus nouveaux collègues.

Dernier acte : celui de la famille et des amis. Permettez-moi, chère lectrice ou cher lecteur, de commencer par les amis. Car oui, eux aussi ont contribué à l'élaboration de la thèse que vous n'allez pas tarder à refermer, tout comme eux. Pour la plupart, je les ai rencontrés au cours de mes études et, sans nul doute, par tous les moments que nous avons passés ensemble, ils ont eu une influence sur ma façon de percevoir et appréhender celles-ci, ainsi que la vie en général. Leur bonne humeur autant que leur soutien ont contribué à l'écriture de ce texte qu'ils ne voudront même pas lire. Merci donc en particulier, dans l'ordre de leur bienheureuse intervention dans la vie de mon cursus mathématique, à Thomas, Antoine, Hélène, Gaël. Merci à tous ceux de mes amis qui sont apparus en dehors de ces clous mathématiques mais qui n'en sont certes pas moins précieux.

Enfin, laissez-moi remercier ma très chère famille. Je remercie tout d'abord sincèrement, chaleureusement et affectueusement mes parents, Jacqueline et Michel, qui m'ont toujours soutenu lors de mes choix, m'encourageant et me félicitant, étant finalement fiers de moi, plus que je ne l'étais moi-même -des parents quoi !-. Ma grand-mère Anne-Marie également a toujours fait partie de ces plus fervents soutiens et je l'en remercie tout autant. Je remercie ensuite Coline, ma moitié qui rend ma vie si douce et agréable, qui m'a toujours soutenu dans toutes les épreuves que l'existence nous impose ou que l'on s'impose soi-même, devant supporter jusqu'aux maths farceuses qui continuaient de triturer mes petites et menues méninges à la maison. Un très affectueux merci pour tout cela. Je remercie les membres de ma famille au sens large qui, de près ou de loin, ont contribué à m'amener là où je me trouve aujourd'hui. Dans cette famille, j'inclus avec joie et fierté celle que j'ai intégrée par alliance et qui a toujours manifesté un vif intérêt pour mon travail.

Table des matières

Introduction

Parmi les variétés algébriques ou analytiques, l'intérêt porté aux variétés singulières constitue une étude en intense activité. Les singularités bloquent l'application de techniques spécifiques aux objets lisses, contraignant les géomètres à développer des méthodes inédites. L'une des découvertes fondamentales dans ce domaine a été le théorème de résolution des singularités de H. Hironaka ([16]). Ce résultat nous dit que l'on peut, en éclatant suffisamment de fois une variété singulière le long de centres lisses, obtenir un morphisme entre une variété lisse et la variété de départ, qui est un isomorphisme en dehors des singularités de celle-ci. Dans cette thèse également, on utilise très fortement la résolution des singularités pour comprendre des propriétés géométriques d'objets singuliers à partir de celles d'objets lisses.

A l'intérieur de ce champ, la géométrie algébrique réelle revêt un statut un peu particulier. En effet, l'absence du caractère algébriquement clos du corps des réels force les géomètres réels, et en particulier les singularistes réels, à inventer des techniques propres à ce domaine. L'originalité de ces méthodes le dispute à l'intérêt des spécificités de ces variétés algébriques réelles, et en particulier de celles qui sont singulières. En effet, s'intercalant entre la catégorie des variétés algébriques complexes et celle des variétés analytiques réelles, la catégorie des variétés algébriques réelles hérite d'une certaine flexibilité de la seconde tout en conservant suffisamment de rigidité.

Cette thèse intervient dans ce contexte particulier. L'impulsion de ce travail est donnée par l'article de C. McCrory et A. Parusiński, intitulé “The weight filtration for real algebraic varieties” ([26]). En 1974, P. Deligne établit dans [8] l'existence d'une filtration dite par le poids sur la cohomologie rationnelle de toute variété algébrique complexe (y compris singulière et/ou non compacte), une découverte qui a permis de grandes avancées dans l'étude de ces objets. Dans leur propre travail, McCrory et Parusiński enrichissent la compréhension d'un analogue réel à cette filtration par le poids, introduit par Totaro ([34]). Précisément, en utilisant un résultat de F. Guillén et V. Navarro-Aznar dans [14], ils associent à toute variété algébrique réelle X un certain complexe $\mathcal{W}C_*(X)$ filtré borné d'espaces vectoriels sur le corps à deux éléments $\mathbb{Z}_2$ (ce corps de base garantit l'orientabilité de nos variétés).

Le comportement de ce complexe de poids $\mathcal{W}C_*$, fonctoriel relativement aux morphismes réguliers propres, vis-à-vis des éclatements et des inclusions ouvertes nous permet d'étudier l'intégralité des variétés algébriques réelles à partir du cas lisse compact. Ces propriétés peuvent se lire sur la suite spectrale $\widetilde{E}$ qu'il induit, comme tout complexe filtré. Soit X une variété algébrique réelle, alors la suite spectrale de poids $\widetilde{E}(X)$ converge vers l'homologie de Borel-Moore $H_*(X)$ de l'ensemble des points réels de X (sur $\mathbb{Z}_2$), sur laquelle est induite la filtration dite par le poids et que l'on note $\mathcal{W}$. Notons que dans le cadre complexe, la suite spectrale (sur $\mathbb{Q}$) associée à la filtration de Deligne dégénère dès le terme $\widetilde{E}^2$, ce qui n'est en général pas le cas de la suite spectrale de poids réelle (à coefficients sur $\mathbb{Z}_2$). Elle convergera cependant à la page $\widetilde{E}^2(X)$ si la variété est compacte non-singulière, se réduisant à la seule colonne $p = 0$. Cette condition de pureté, couplée à une certaine additivité sur les lignes du terme $\widetilde{E}^2$, amène les deux auteurs à extraire de la suite spectrale de poids les nombres de Betti virtuels β_k, des invariants additifs sur les variétés algébriques réelles, coïncidant avec les dimensions des homologies dans le cas lisse compact, dont ils ont eux-mêmes montré l'existence et l'unicité avec ces propriétés dans [25], en s'inspirant d'un résultat de F. Bittner ([3]).

Enfin, C. McCrory et A. Parusiński parviennent à définir le complexe de poids des variétés algébriques réelles via une filtration $\mathcal{G}C_*$, construite à partir de résolutions des singularités, qu'ils étendent en un foncteur $\mathcal{N}C_*$ à la catégorie plus grande des ensembles $\mathcal{AS}$, i.e les combinaisons booléennes d'ensembles symétriques par arcs, en utilisant les fonctions Nash constructibles.

De ces résultats intéressants en eux-mêmes, citons quelques-unes des conséquences que McCrory et Parusiński obtiennent. La fonctorialité de la filtration Nash-constructible $\mathcal{N}C_*$ relativement aux applications continues propres avec graphe $\mathcal{AS}$ implique par exemple que les nombres de Betti virtuels (que l'on peut étendre aux ensembles $\mathcal{AS}$ comme l'a montré G. Fichou dans [11]) sont invariants par homéomorphisme avec graphe $\mathcal{AS}$, et ceci sans utiliser le théorème de factorisation faible ([1]). En utilisant ce fait, les auteurs montrent qu'une application avec graphe $\mathcal{AS}$ d'un ensemble $\mathcal{AS}$ dans lui-même qui est injective, est également surjective. Parmi ces déductions, notons également les critères pour déterminer si une fonction constructible coïncide avec une fonction génériquement Nash-constructible modulo une puissance de 2.

Entrons à présent dans les contributions de cette thèse. Soit G un groupe fini. La fonctorialité du complexe de poids $\mathcal{W}C_*$ de McCrory et Parusiński nous autorise à nous pencher sur le cas des variétés algébriques réelles munies d'une action de G par isomorphismes algébriques. Peut-on définir un analogue équivariant du complexe de poids, avec des propriétés similaires, qui induirait une filtration sur une certaine homologie équivariante (qui prendrait en compte à la fois la structure des variétés considérées, celle du groupe qui agit, et l'action elle-même), ainsi qu'une suite spectrale dont on pourrait extraire nombre d'informations comme dans le cadre non-équivariant ?

La définition de l'homologie "équivariante" des variétés algébriques réelles avec action que nous allons considérer va nous guider vers la réponse -positive- à cette question. A noter que le choix de la finitude du groupe est guidé d'une part par l'existence dans ce cas d'une résolution des singularités équivariante, d'une compactification équivariante et d'un lemme de Chow-Hironaka équivariant ([9]). Cela nous permettra d'utiliser une version équivariante du critère d'extension de F. Guillén et V. Navarro Aznar. D'autre part, on vise également les applications aux produits. En effet, l'isomorphisme de Künneth sur les homologies équivariantes considérées nécessitera que les groupes mis en jeu soient d'ordre fini (voir chapitre 7). De plus, la structure des groupes finis enrichit déjà considérablement les objets équivariants. On verra en particulier que l'étude du cas $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est très intéressante.

Dans leur article, C. McCrory et A. Parusiński associent fonctoriellement (relativement aux applications semi-algébriques continues propres) à toute variété algébrique réelle X le complexe $C_*(X)$ des chaînes semi-algébriques à supports fermés (sur $\mathbb{Z}_2$), dont l'homologie $H_*(X)$ est l'homologie de Borel-Moore de (l'ensemble des points réels de) la variété X. Si le groupe G agit sur une variété X, la fonctorialité de C_* nous permet alors de munir le complexe de chaînes $C_*(X)$ d'une structure de G-complexe. L'homologie équivariante $H_*(X;G)$ de X que nous considérerons sera alors l'homologie $H_*(G, C_*(X))$ du groupe G à valeurs dans le complexe $C_*(X)$ des chaînes semi-algébriques à supports fermés de X.

Ce choix repose sur les faits suivants. Tout d'abord, à tout G-complexe K_* sont associées deux suites spectrales $_IE$ et $_{II}E$ qui convergent vers l'homologie $H_*(G, K_*)$ du groupe G à coefficients dans K_*, qui est l'homologie d'un complexe total construit à partir d'un complexe double. A. Grothendieck est l'un des premiers à avoir dans [13] mis en lumière et exhibé ainsi des suites spectrales de configurations bien plus générales. J. van Hamel ([35]) extrait d'ailleurs de cette théorie celle qui converge vers sa propre homologie équivariante. Or, celle-ci n'est autre que la suite spectrale $_IE$ dite de Hochschild-Serre avec $K_* = C_*(X)$ (du moins si X est compacte), ce qui nous permet d'affirmer que ces deux homologies équivariantes sont les mêmes dans le cas compact. L'intérêt de cette constatation est qu'elle nous autorisera dans les travaux qui suivront celui-ci à utiliser les nombreuses propriétés que tire van Hamel de son homologie équivariante, notamment sa dualité de Poincaré, et cela nous invite à penser qu'il pourrait s'agir d'un bon choix pour étudier les variétés algébriques réelles avec action. De plus, grâce à la suite spectrale de Hochschild-Serre, on comprend mieux -et on calcule plus efficacement- l'homologie équivariante, mélange d'homologie de Borel-Moore et de cohomologie de groupe (à coefficients dans un module). Il est à noter que cette homologie équivariante est différente par exemple de celle de Brown ([6]), et que les espaces $H_n(X;G)$ de degré négatif peuvent ne pas être nuls.

La conception, à partir d'un G-complexe K_*, du complexe dont l'homologie est l'homologie de G à valeurs dans K_* est fonctorielle relativement aux morphismes de complexes équivariants. C'est ce foncteur, que l'on note L^G, qui, appliqué au complexe des chaînes semi-algébriques $C_*(X)$, fournit un complexe $C^G(X)$ qui calcule l'homologie équivariante de X. Et c'est également au complexe de poids que l'on va l'appliquer pour obtenir notre complexe de poids équivariant $\Omega C_*^G(X)$. En effet, d'une part, la fonctorialité du complexe de poids (non-équivariant) nous permet de munir le complexe de poids $\mathcal{W}C_*(X)$ de toute G-variété algébrique réelle X d'une action de G induite, et de construire ainsi un foncteur ${}^G\mathcal{W}C_*$ avec des propriétés analogues à celles du complexe de poids $\mathcal{W}C_*$. Ceci constitue un premier résultat de cette thèse. D'autre part, on montre que le foncteur L^G se "comporte bien" par rapport aux complexes filtrés. En particulier, il préserve les quasi-isomorphismes filtrés, ces morphismes de complexes filtrés qui induisent un isomorphisme au niveau des suites spectrales induites dès la page 1, et il commute avec l'opération qui consiste à considérer le complexe filtré simple associé à un diagramme cubique de complexes filtrés. Cette compatibilité du foncteur L^G vis-à-vis des catégories filtrées nous permet de déduire des propriétés du complexe de poids non-équivariant, celles, analogues, du complexe de poids équivariant. Ce théorème constitue un second résultat de ce travail.

Cependant, des différences significatives apparaissent entre les complexes de poids équivariant et non-équivariant. Pour les distinguer, il faut observer le comportement de la suite spectrale induite par le complexe filtré de poids équivariant. Soit X une G-variété algébrique réelle. Notons avant toute chose que, en remarquant que l'homologie du complexe de poids équivariant $\Omega C_*^G(X)$ de X est isomorphe à son homologie équivariante, on peut affirmer que la suite spectrale de poids équivariante ${}^G\widetilde{E}(X)$ de X converge vers $H_*(X;G)$. Etudions maintenant cette suite spectrale de poids équivariante. Première différence avec son analogue non-équivariante : elle n'est pas bornée à gauche (du fait que l'application du foncteur L^G fournit en général un complexe qui n'est borné que par le haut). Les lignes du terme ${}^G\widetilde{E}^2$ ne peuvent donc plus constituer des invariants additifs. De même, si X est une variété lisse compacte, la suite spectrale ${}^G\widetilde{E}$ ne convergera pas nécessairement au terme ${}^G\widetilde{E}^2$. Néanmoins, dans ce cas, on montre que la suite spectrale de poids équivariante coïncide avec la suite spectrale de Hochschild-Serre associée à X.

L'une des explications de la profondeur de la structure de cette suite spectrale réside dans le fait que son terme ${}^G\widetilde{E}^2$ puisse s'écrire comme l'homologie du groupe G à coefficients dans la suite spectrale de poids (non-équivariante). On a en effet : ${}^G\widetilde{E}^2_{p,q} = H_p\left(G, \widetilde{E}^1_{*,q}\right)$ pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$. Le fait que de la cohomologie de groupe soit ainsi mêlée à la suite spectrale de poids enrichit considérablement les informations qu'elle recèle : cela complique sa compréhension tout en nous fournissant de nouveaux outils pour percer ses mystères. En effet, pour tout q, on obtient ainsi deux nouvelles suites spectrales ${}^q_IE$ et ${}^q_{II}E$ qui convergent vers l'homologie ${}^G\widetilde{E}^2_{*,q}$ du groupe G à coefficients dans $\widetilde{E}^1_{*,q}$. Outre le fait que ces objets puissent être effectivement utiles pour en apprendre plus sur la suite spectrale de poids équivariante, les termes ${}^q_{II}E^2$ recèlent une propriété particulière lorsqu'ils sont calculés à partir de la filtration Nash-constructible (avec action).

En effet, si l'on considère une inclusion fermée équivariante $Y \subset X$ de G-variétés algébriques réelles, la décomposition des suites exactes courtes scindées

$$0 \to \mathcal{N}_pC_k(Y) \to \mathcal{N}_pC_k(X) \to \mathcal{N}_pC_k(X \setminus Y) \to 0$$

est donnée par un morphisme équivariant. Cela induit alors une suite exacte longue finie

$$\cdots \to {}^q_{II}E^2_{i,j}(Y) \to {}^q_{II}E^2_{i,j}(X) \to {}^q_{II}E^2_{i,j}(X \setminus Y) \to {}^q_{II}E^2_{i,j-1}(Y) \to \cdots$$

Pour tout q, on peut ainsi extraire un invariant additif ${}^q\!B_i$ de chaque ligne du terme ${}^q_{II}E^2$, dans le cas où tous les $\mathbb{Z}_2$-espaces vectoriels ${}^q_{II}E^2_{p,q}(X)$ sont de dimension finie. La vérification de cette hypothèse pour toute variété algébrique réelle X constituera l'objet d'une future étude. Fortement reliée à une compréhension plus profonde des chaînes Nash-constructibles invariantes sous l'action de G, elle devrait se baser sur l'emploi de techniques géométriques équivariantes très fines.

Plus étonnant, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on parvient à construire une suite spectrale ${}^k_{II}\widehat{E}$ dont la caractéristique d'Euler est exactement $\sum_{q+i=k} {}^q\!B_i$, un nouvel invariant additif que l'on note B_k^G. La construction du complexe double dont est issue cette suite spectrale, ainsi que son étude dans le cas $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (premier cas difficile dans lequel l'action du groupe, même à deux éléments, enrichit considérablement les informations contenues dans les suites spectrales) constitue un important volet du travail de cette thèse.

En calculant notamment l'autre suite spectrale ${}^{k}_{I}\widehat{E}$ induite par ce complexe double, on cherche à mieux comprendre les invariants additifs B_k^G. Pour cela, on met en œuvre un autre résultat fondamental de cette thèse que l'on démontre dans le chapitre 3, à savoir la suite exacte de Smith Nash-constructible (pour $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Cette suite exacte courte est un analogue de la suite exacte de Smith tenant compte de la filtration Nash-constructible en le sens suivant. Soit X une G-variété algébrique réelle, avec $G = \{1, \sigma\}$. Si c est une chaîne de $\mathcal{N}_\alpha C_k(X)$ invariante sous l'action induite de G, alors on peut l'écrire comme la somme de sa restriction à l'ensemble X^G des points fixes et de l'image par $1 + \sigma$ d'une chaîne appartenant au degré $\mathcal{N}_{\alpha+1} C_k(X)$ de la filtration. Autrement dit, si la suite exacte courte de Smith nous informait que l'on pouvait découper la somme d'une chaîne et de sa restriction aux points fixes en la somme d'une autre chaîne et de son image par l'involution σ, ce théorème nous dit que l'on peut avoir un certain contrôle sur la régularité de cette chaîne par rapport à celle de la chaîne de départ.

Il se base sur un autre résultat qui présente un intérêt certain jusqu'en dehors du contexte de ce travail. On établit en effet que si M est une variété affine compacte connexe munie d'une involution algébrique σ non triviale, on peut découper M en deux sous-ensembles semi-algébriques fermés A et $\sigma(A)$, images l'un de l'autre par l'involution σ, le long d'un sous-ensemble symétrique par arcs S, de codimension 1 et globalement stable sous l'action de σ. La démonstration de ce théorème fait appel à des théorèmes profonds sur les variétés Nash et les fonctions Nash, pour la plupart dus à M. Shiota ([31]).

Evoquons également une autre propriété obtenue dans ce contexte, qui nous donne une certaine interprétation de la suite de Smith Nash-constructible dans le cas compact et libre. Nous montrons que si X est une variété algébrique réelle compacte, munie d'une action libre de $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, les chaînes de X de degré α invariantes sous l'action induite de G correspondent aux chaînes de degré α du quotient X/G, qui est alors un ensemble symétrique par arcs.

Revenons à nos invariants B_k^G (toujours avec $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). L'utilisation de la suite exacte courte de Smith Nash-constructible nous permet de calculer la suite spectrale ${}^{k}_{I}\widehat{E}$ et d'obtenir une formule pour ces invariants additifs :

$$B_k^G(X) = (-1)^k \chi\left(H_*\left(\frac{(\mathcal{N}_{-k} C_*)^G}{(\mathcal{N}_{-k-1} C_*)^G}\right)\right) + \sum_{q \geq k+1} \beta_q\left(X^G\right),$$

pour toutes les G-variétés algébriques réelles X pour lesquelles ces quantités sont définies. On découvre alors notamment que les invariants additifs ${}'B_k^G$ définis par le membre de droite coïncident avec les nombres de Betti virtuels équivariants de G. Fichou (les uniques invariants additifs sur les G-variétés algébriques réelles coïncidant avec les dimensions des espaces d'homologie équivariante sur les lisses compactes, voir [12]) si $k < 0$, et que si X est une variété compacte munie d'une action libre de G, $B_k^G(X) = \beta_k^G(X)$ pour tout k. Un important travail a déjà été fourni pour obtenir ce résultat. Le futur de cette recherche sera d'identifier si l'on a obtenu ainsi de nouveaux invariants additifs sur les variétés algébriques réelles avec action de G, ou si ce sont précisément les nombres de Betti virtuels équivariants, y compris en degré positif ou nul. Quelle que soit la réponse, nous pouvons espérer qu'elle amènera des avancées significatives pour la compréhension des variétés algébriques réelles avec action.

Dans cette direction, on identifie plus en avant le lien qui pourrait exister entre ces deux groupes d'invariants, en réalisant les nombres de Betti virtuels équivariants à partir d'un nouveau complexe filtré de poids. On qualifie celui-ci d'invariant car il induit une filtration sur l'homologie des chaînes invariantes des G-variétés algébriques réelles. Pour tout k, on extrait de la ligne k de la page 2 de la suite spectrale qu'il induit un invariant additif auquel on ajoute les nombres de Betti virtuels des points fixes de degré plus grand que k pour obtenir le nombre de Betti virtuel équivariant β_k^G. Cette construction des nombres de Betti virtuels équivariants constitue la réalisation de l'un des objectifs importants de cette thèse, en permettant une meilleure compréhension de ces invariants additifs. L'identification de la filtration Nash-constructible/géométrique (avec action) en tant que possible pont entre les différents complexes de poids et leurs propriétés se révèle une autre avancée intéressante. En effet, si la filtration Nash-constructible réalisait le complexe de poids invariant, cela nous permettrait d'obtenir effectivement les nombres de Betti virtuels équivariants à partir du complexe de poids équivariant (réalisé par la filtration Nash-constructible) via la suite spectrale ${}^k_I\widehat{E}$ induite par la suite spectrale de poids équivariante.

Dans cette thèse, on étudie également le pendant cohomologique du complexe de poids équivariant. De la même manière que l'on s'était basé sur la fonctorialité du complexe de poids de C. McCrory et A. Parusiński pour le munir d'une action de G et lui appliquer ensuite le foncteur L^G, on prend appui sur le travail de T. Limoges dans [21], qui a établi l'existence d'un complexe de poids cohomologique induisant une filtration par le poids sur la cohomologie singulière à supports compacts de l'ensemble des points réels des variétés algébriques réelles. La fonctorialité du complexe de poids cohomologique nous permet en effet, sur la catégorie des G-variétés algébriques réelles, de le munir d'une action induite de G. On applique alors au complexe de poids cohomologique avec action un foncteur L_G, dont on montre qu'il possède des propriétés analogues à celles du foncteur L^G (notamment celle de la préservation des quasi-isomorphismes filtrés), pour obtenir un complexe de poids cohomologique équivariant qui induit une filtration par le poids dite équivariante sur la cohomologie équivariante vers laquelle converge la suite spectrale de Hochschild-Serre de terme ${}_IE_2^{p,q}(X) = H^p(G, H^q(X))$. Il est à noter que cette suite spectrale coïncide ainsi avec celle associée à la cohomologie équivariante de J. van Hamel (au moins pour X compacte) dans [35], et que cette dernière est donc égale à la nôtre. Dans le cadre cohomologique également, on déduit plusieurs propriétés de la suite spectrale de poids équivariante cohomologique et de la réalisation du complexe de poids équivariant cohomologique de celles du cadre sans action de T. Limoges.

Enfin, on porte notre attention sur la question des produits de filtrations par le poids équivariantes. Toujours dans [21], T. Limoges s'est aussi intéressé au produit de filtrations par le poids des variétés algébriques réelles. Il montre ainsi l'existence d'un quasi-isomorphisme filtré entre le produit tensoriel des complexes de poids et le complexe de poids du produit, induisant la compatibilité de l'isomorphisme de Künneth avec la filtration par le poids. Plus précisément, T. Limoges utilise la réalisation du complexe de poids par la filtration géométrique pour prouver que, si X et Y sont deux variétés algébriques réelles, on a un quasi-isomorphisme filtré $\mathcal{G}C_*(X) \otimes \mathcal{G}C_*(Y) \to \mathcal{G}C_*(X \times Y)$.

Soient G et G' deux groupes finis. Notre travail consiste à montrer que si les variétés X et Y

sont munies respectivement d'une action de G et d'une action de G', ce quasi-isomorphisme filtré est équivariant par rapport aux actions de $G \times G'$ induites. On peut alors y appliquer le foncteur $L^{G\times G'}$ dans l'optique d'obtenir un quasi-isomorphisme filtré entre le produit des complexes de poids équivariants et le complexe de poids équivariant du produit. Une dernière étape se révèle ainsi nécessaire, à savoir la preuve que si K_* est un G-complexe filtré et M_* un G'-complexe filtré, le produit $L^G(K_*) \otimes L^{G'}(M_*)$ et $L^{G\times G'}(K_* \otimes M_*)$ sont au moins reliés par un quasi-isomorphisme filtré. On montre en fait que si l'on considère des résolutions projectives particulières pour les groupes finis G et G' -les résolutions bar-, ces deux complexes filtrés sont naturellement isomorphes.

La conséquence de cette propriété sur le produit des filtrations géométriques équivariantes constitue, avec son pendant cohomologique (que l'on montre également de façon similaire en prenant appui sur l'étude des produits de complexes de poids cohomologiques de T. Limoges), une étape importante pour la compréhension de deux autres produits sur les cohomologie et homologie équivariantes, à savoir les produits cup et cap. Cependant, la preuve par T. Limoges du caractère filtré de leurs analogues sur les cohomologie et homologie non-équivariantes, par rapport aux filtrations par le poids, se base sur des considérations sur les suites spectrales de poids. Or, on a vu que les différences signicatives des suites spectrales de poids équivariantes avec celles-ci nous empêchaient de nous en inspirer brutalement pour obtenir des propriétés analogues. Une investigation supplémentaire du produit des suites spectrales de poids équivariantes, se basant néanmoins sur ce qui a été fait ici au niveau des produits des complexes filtrés de poids équivariant, sera nécessaire pour établir si les produits cup et cap sur les cohomologie et homologie équivariantes sont filtrés, par rapport à la filtration par le poids équivariante.

Ce travail a été divisé en sept chapitres. Dans le premier, on rappelle les définitions et propriétés de base des fonctions constructibles, utilisées pour définir le complexe des chaînes semi-algébriques à supports fermés. On montre également que si X est un sous-ensemble semi-algébrique de l'ensemble des points réels d'une variété algébrique réelle munie d'une action d'un groupe G par homéomorphismes semi-algébriques, le complexe des chaînes semi-algébriques est muni d'une action induite de G, qui commute avec les opérations de base définies par C. McCrory et A. Parusiński.

Dans le deuxième chapitre, on rappelle les définitions et les propriétés établies par McCrory et Parusiński concernant le complexe de poids des variétés algébriques réelles, nécessaires pour nous permettre d'introduire ensuite notre complexe de poids avec action. Dans le chapitre trois, on montre également le théorème de "découpage" d'une variété Nash affine compacte connexe munie d'une involution algébrique. La suite exacte courte de Smith Nash-constructible, conséquence de ce résultat, y est ensuite établie, ainsi que son interprétation dans le cas libre compact.

Le chapitre quatre est celui qui recèle la construction du complexe de poids équivariant, après des rappels sur la cohomologie et l'homologie de groupe ainsi que la définition du foncteur L^G, pour lequel on montre les propriétés de compatibilité avec les catégories filtrés. On établit également de nombreuses propriétés sur la suite spectrale de poids équivariante, dont on extrait d'autres suites spectrales. On montre également que si le groupe G est d'ordre impair, la situation est considérablement simplifiée grâce au théorème de Maschke, qui nous dit que le foncteur Γ^G (qui associe à un $\mathbb{Z}_2$-espace vectoriel muni d'une action linéaire d'une groupe G, le sous-espace vectoriel de ses éléments invariants sous l'action) est exact dans ce cas. C'est dans le chapitre cinq que l'on utilise la réalisation du complexe de poids équivariant à partir de la filtration géométrique, afin de retrouver des invariants additifs B_k^G. On y étudie une suite spectrale qui les calcule et on montre ainsi qu'ils coïncident avec les nombres de Betti virtuels équivariants dans certains cas. Dans le cas où $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on montre enfin l'existence du complexe de poids invariant à partir duquel on retrouve les nombres de Betti virtuels équivariants.

Dans le chapitre six, on rappelle les propriétés obtenues par T. Limoges sur le complexe de poids et la filtration par le poids cohomologiques. On les utilise pour montrer l'existence d'un complexe de poids cohomologique avec action et d'un complexe de poids cohomologique équivariant aux propriétés analogues à celles de leurs pendants homologiques. Enfin, dans un dernier chapitre, sont rappelées celles qu'il a obtenues concernant les produits de filtrations par le poids pour les variétés algébriques réelles avant que ne soient montrées leur équivariance et leurs analogues sur les produits de filtrations par le poids équivariantes.

Chapitre 1

Chaînes semi-algébriques et action de groupe

Dans ce chapitre, on rappelle les définitions et les propriétés des chaînes semi-algébriques à supports fermés d'un ensemble semi-algébrique localement compact, données dans l'appendice de [26]. On vérifie également des propriétés dont on aura besoin par la suite (1.2.3, 1.2.4, 1.2.5, 1.2.6, 1.4.5).

Dans le dernier point, considérant une action sur un ensemble semi-algébrique localement compact, on munit le complexe de ses chaînes semi-algébriques à supports fermés de l'action induite par fonctoralité. On vérifie alors que l'action commute avec les opérations de restriction, d'adhérence (1.5.3) et de tiré en arrière (1.5.4).

1.1 Rappel sur les fonctions constructibles

On commence ce chapitre en rappelant les définitions et les propriétés de base sur les fonctions constructibles, suivant [24].

Dans ce paragraphe et dans la suite de ce chapitre, on considère X un ensemble semi-algébrique localement compact i.e. un sous-ensemble semi-algébrique de l'ensemble des points réels d'une variété algébrique réelle.

Définition 1.1.1. *Une fonction $\varphi : X \to \mathbb{Z}$ est dite constructible si on peut l'écrire comme une somme finie*

$$\varphi = \sum_{i \in I} m_i \mathbf{1}_{X_i}$$

où I est un ensemble fini et, pour tout $i \in I$, $\mathbf{1}_{X_i}$ est la fonction caractéristique d'un sous-ensemble semi-algébrique X_i de X et $m_i \in \mathbb{Z}$.

Remarque 1.1.2. On peut toujours trouver une présentation de φ où les X_i sont fermés dans X.

Un outil fondamental des fonctions constructibles est l'intégration par rapport à la caractéristique d'Euler (à support compact) :

Définition 1.1.3. *Soit $\varphi = \sum m_i \mathbf{1}_{X_i}$ une fonction constructible sur X (avec les X_i fermés dans X) et soit Z un sous-ensemble semi-algébrique fermé de X. On définit l'intégrale d'Euler de φ sur Z par*

$$\int_Z \varphi d\chi = \sum_i m_i \chi(X_i \cap Z).$$

On définit alors le poussé en avant induit par une application semi-algébrique continue propre :

Définition 1.1.4. *Soient Y un autre ensemble semi-algébrique localement compact et $f : X \to Y$ une application semi-algébrique continue propre. Soit φ une fonction constructible sur X. Alors le poussé en avant $f_*\varphi$ est la fonction constructible sur Y définie par*

$$f_*\varphi(y) = \int_{f^{-1}(y)} \varphi d\chi$$

pour tout $y \in Y$.

On définit enfin l'entrelacs d'une fonction constructible :

Définition 1.1.5. *Soient X une fonction constructible sur X et x un point de X. Alors l'entrelacs $\Lambda\varphi(x)$ de φ en x est défini par*

$$\Lambda\varphi(x) = \int_{S(x,\epsilon)\cap X} \varphi d\chi.$$

L'entrelacs de φ ainsi défini est une fonction constructible sur X.

On termine ces rappels par différentes propriétés de fonctorialité et de commutativité du poussé en avant et de l'entrelacs :

Proposition 1.1.6. ([24])

1. $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$,
2. $\Lambda \circ \Lambda = 2\Lambda$,
3. $f_*\Lambda = \Lambda f_*$.

1.2 Définition du complexe des chaînes semi-algébriques à supports fermés

Suivant C. McCrory et A. Parusiński ([26], *Appendix*), on donne une définition du complexe des chaînes semi-algébriques de X à supports fermés et à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$, équivalente à celle de [4], 11.7. L'homologie de ce complexe est l'homologie de Borel-Moore de X à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$.

Définition 1.2.1. *Pour $k \geq 0$, on note $S_k(X)$ le $\mathbb{Z}_2$-espace vectoriel engendré par les sous-ensembles semi-algébriques fermés de X de dimension $\leq k$.*
On note alors $C_k(X)$ le $\mathbb{Z}_2$-espace vectoriel quotient de $S_k(X)$ par les relations suivantes :

1. *Si A et B sont des sous-ensembles semi-algébriques fermés de X de dimension $\leq k$, alors*

$$A + B \sim cl(A \div B),$$

où $A \div B := (A \cup B \setminus A \cap B)$ est la différence symétrique de A et B, et cl désigne l'adhérence (par rapport à la topologie euclidienne de l'espace $\mathbb{R}^n$ dans lequel on se place).

2. *Si A est un sous-ensemble semi-algébrique fermé de X avec $\dim A < k$, alors $A \sim 0$.*

Un élément c de $C_k(X)$ est appelé une chaîne semi-algébrique à support fermé de dimension k.

Remarque 1.2.2. Toute chaîne c de $C_k(X)$ peut s'écrire $[A]$ où A est un sous-ensemble semi-algébrique fermé de X de dimension $\leq k$, et $[A]$ désigne la classe de A dans l'espace vectoriel quotient $C_k(X)$.

Soit $c = [A] \in C_k(X)$. Le plus petit ensemble semi-algébrique représentant c est appelé le support de c et noté Supp c. On a Supp $c = \{x \in A \mid \dim_x = k\}$.

Le lemme suivant va nous permettre d'identifier dans $C_k(X)$ l'union de deux semi-algébriques fermés à leur somme, lorsque leur intersection est “suffisamment petite”.

Lemme 1.2.3. *Soient A et B deux sous-ensembles semi-algébriques fermés de X de dimension $\leq k$. Si $A \cap B$ est de dimension $< k$, on a*

$$[A \cup B] = [A] + [B]$$

dans $C_k(X)$.

Démonstration. On calcule $[A \cup B] + [A] + [B]$ dans $C_k(X)$:

$$\begin{aligned} [A \cup B] + [A] + [B] &= [A \cup B] + [cl(A \cup B \setminus A \cap B)] \\ &= [cl\big((A \cup B) \cup cl(A \cup B \setminus A \cap B) \setminus (A \cup B) \cap cl(A \cup B \setminus A \cap B)\big)] \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cup cl(A \cup B \setminus A \cap B) &= cl\big(A \cup B \cup (A \cup B \setminus A \cap B)\big) \\ &= cl(A \cup B) \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

De plus, $(A \cup B) \cap cl(A \cup B \setminus A \cap B)$ contient $A \cup B \setminus A \cap B$ donc $(A \cup B) \setminus ((A \cup B) \cap cl(A \cup B \setminus A \cap B))$ est contenu dans $A \cup B \setminus (A \cup B \setminus A \cap B) = A \cap B$.

Ainsi, $cl\big((A \cup B) \cup cl(A \cup B \setminus A \cap B) \setminus (A \cup B) \cap cl(A \cup B \setminus A \cap B)\big)$ est contenu dans $cl(A \cap B)$, qui de dimension $< k$ (car $\dim cl(A \cap B) = \dim A \cap B < k$). La classe de cet ensemble est donc 0 dans $C_k(X)$, i.e. $[A \cup B] + [A] + [B] = 0$.

□

Cette propriété entraîne un corollaire, également utile pour la suite.

Corollaire 1.2.4. *Si A et C sont des sous-ensembles semi-algébriques fermés de X tels que $C \subset A$ avec dim $C < k$ alors $[cl(A \setminus C)] = [A]$ dans $C_k(X)$.*

Démonstration. En effet, $\dim(C \cap cl(A \setminus C)) \leq \dim C < k$ donc, d'après le lemme,

$$[cl(A \setminus C)] + [C] = [cl(A \setminus C) \cup C]$$

et $cl(A \setminus C) \cup C = cl\big((A \setminus C) \cup C\big) = cl(A) = A$ (et $[C] = 0$). □

On établit deux autres lemmes, utilisés dans la preuve de 3.4.2. Dans ce résultat fondamental de notre étude, on parviendra à découper une chaîne semi-algébrique invariante sous une involution, modulo sa restriction aux points fixes, en deux chaînes images l'une de l'autre et dont le "degré de régularité" (par rapport à la filtration dite Nash-constructible 2.6.5) ne s'éloignera pas trop du degré initial de la chaîne de départ.

Lemme 1.2.5. *Soient A_1, A_2 et A_3 trois sous-ensembles semi-algébriques fermés de X de dimension k. Si $[A_1] = [A_2]$ dans $C_k(X)$, alors $[A_1 \cap A_3] = [A_2 \cap A_3]$.*

Démonstration. On a $[A_1 \cap A_3] + [A_2 \cap A_3] = [cl\left((A_1 \cap A_3) \div (A_2 \cap A_3)\right)]$, or $(A_1 \cap A_3) \div (A_2 \cap A_3) = (A_1 \div A_2) \cap A_3$ et $\dim\ A_1 \div A_2 < k$ car $[A_1] = [A_2]$. □

Lemme 1.2.6. *Soient A_1, A_2 deux sous-ensembles semi-algébriques de X de dimension k avec A_1 fermé dans X. Alors, dans $C_k(X)$, $[cl(A_1 \cap A_2)] = [A_1 \cap cl(A_2)]$.*

Démonstration. On a

$$cl(A_1 \cap A_2) \div (A_1 \cap cl(A_2)) = A_1 \cap cl(A_2) \setminus cl(A_1 \cap A_2) \subset A_1 \cap cl(A_2) \setminus A_1 \cap A_2 = A_1 \cap (cl(A_2) \setminus A_2)$$

et $\dim(cl(A_2) \setminus A_2) < k$. □

On définit enfin la différentielle de $C_*(X)$ pour en faire un véritable complexe de chaînes.

Définition et Proposition 1.2.7. *Pour $k \geq 0$, on définit l'application*

$$\partial_k : C_k(X) \longrightarrow C_{k-1}(X)$$

comme suit. Soit $c \in C_k(X)$ avec $c = [A]$, alors on pose

$$\partial_k c = [\partial A],$$

où $\partial A := \{x \in A \mid \Lambda \mathbf{1}_A(x) \equiv 1 \pmod 2\}$. Cette application est linéaire et vérifie $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$.

$(C_*(X), \partial_*)$ est ainsi un complexe de $\mathbb{Z}_2$-espaces vectoriels, appelé complexe des chaînes semi-algébriques à supports fermés (et à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$).

On définit par la suite différentes opérations sur ce complexe des chaînes semi-algébriques à supports fermés.

1.3 Fonctorialité des chaînes semi-algébriques

Définition et Proposition 1.3.1. *Soient X et Y deux ensembles semi-algébriques localement compacts et $f : X \to Y$ une application semi-algébrique continue propre. On définit l'application $f_* : C_*(X) \to C_*(Y)$ comme suit. Soient $k \geq 0$ et $c = [A] \in C_k(X)$, alors $f_*(c) := [B]$, où*

$$B := cl\{y \in Y \mid f_*\mathbf{1}_A(y) \equiv 1 \ mod\ 2\},$$

où f_* est ici le poussé en avant pour les fonctions constructibles. L'application $f_* : C_*(X) \to C_*(Y)$ vérifie $\partial_k f_* = f_* \partial_k$ et f_* est donc un morphisme de complexes.

Proposition 1.3.2. ([26]) *On a*

$$id_* = id,$$

et

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_*.$$

1.4 Restriction, adhérence

Définition 1.4.1. *Soit $Z \subset X$ un sous-ensemble semi-algébrique localement fermé. On définit l'opération de restriction par rapport à Z sur les chaînes semi-algébriques de X comme suit. Soient $k \geq 0$ et $c = [A] \in C_k(X)$, on définit la restriction $c|_Z$ de c par rapport à Z par*

$$c|_Z := [A \cap Z] \in C_k(Z).$$

La restriction est linéaire :

Proposition 1.4.2. *Soit $Z \subset X$ un sous-ensemble semi-algébrique localement fermé. La restriction à Z est linéaire sur les chaînes semi-algébriques à supports fermés de X.*

Démonstration. Soient $c = [A],\ c' = [B] \in C_k(X)$ (non nulles). Montrons que

$$(c + c')|_Z = c|_Z + c|_{Z'}.$$

On a $c + c' = [cl_X(A \div B)]$ et donc $(c + c')|_Z = [cl_X(A \div B) \cap Z]$.
D'un autre côté, $c|_Z + c|_{Z'} = [cl_Z\big((A \cap Z) \div (B \cap Z)\big)] = [cl_Z\big((A \div B) \cap Z\big)]$.

Calculons donc $[cl_X(A \div B) \cap Z] + [cl_Z\big((A \div B) \cap Z\big)]$. On a

$$\big(cl_X(A \div B) \cap Z\big) \div \big(cl_Z\big((A \div B) \cap Z\big)\big) = \big(cl_X(A \div B) \cap Z\big) \setminus \big(cl_Z\big((A \div B) \cap Z\big)\big)$$

(car $cl_Z\big((A \div B) \cap Z\big) \subset cl_X(A \div B) \cap Z$). Or,

$$\big(cl_X(A \div B) \cap Z\big) \setminus \big(cl_Z\big((A \div B) \cap Z\big)\big) \subset \big(cl_X(A \div B) \cap Z\big) \setminus \big((A \div B) \cap Z\big) = \big(cl_X(A \div B) \setminus (A \div B)\big) \cap Z.$$

Comme $\dim cl_X(A \div B) \setminus (A \div B) < \dim A \div B \leq k$, au total

$$(c + c')|_Z + c|_Z + c|_{Z'} = 0.$$

□

Remarque 1.4.3. La restriction ne commute pas avec l'opérateur de bord en général, mais si U est un sous-ensemble semi-algébrique ouvert de X, on a $\partial_k(c|_U) = (\partial_k c)|_U$.

Définition 1.4.4. *Soit $Z \subset X$ un sous-ensemble semi-algébrique localement fermé. On définit l'opération d'adhérence sur les chaînes semi-algébriques de Z comme suit. Soient $k \geq 0$ et $c = [A] \in C_k(Z)$, on définit l'adhérence $\overline{c}$ de c par*

$$\overline{c} = [cl(A)] \in C_k(X),$$

où $cl(A)$ est l'adhérence de A dans X.

Vérifions la propriété de linéarité de cette opération d'adhérence :

Proposition 1.4.5. *Soit $Z \subset X$ un sous-ensemble semi-algébrique localement fermé. Alors l'opération d'adhérence est linéaire sur les chaînes semi-algébriques à supports fermés de Z.*

Démonstration. Soient $c = [A],\ c' = [B] \in C_k(Z)$. Montrons que

$$\overline{c + c'} = \overline{c} + \overline{c'}.$$

On a $\overline{c + c'} = \overline{[cl_Z(A \div B)]} = [cl_X\big(cl_Z(A \div B)\big)]$. Or $cl_X\big(cl_Z(A \div B)\big) = cl_X(A \div B)$, donc

$$\overline{c + c'} = [cl_X(A \div B)].$$

On a de plus $A \div B = (A \cap B^c) \sqcup (A^c \cap B)$. Ainsi, dans $C_k(X)$,

$$\begin{aligned} [cl_X(A \div B)] &= [cl_X\big((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)\big)] \\ &= [cl_X(A \cap B^c) \cup cl_X(A^c \cap B)] \\ &= [cl_X(A \cap B^c)] + [cl_X(A^c \cap B)]. \end{aligned}$$

En effet, $\dim cl_X(A \cap B^c) \cap cl_X(A^c \cap B) < k$ puisque

$$\begin{aligned} cl_X(A \cap B^c) \cap cl_X(A^c \cap B) &= (A \cap B^c) \cap (cl_X(A^c \cap B) \setminus A^c \cap B) \\ &\quad \sqcup \big(cl_X(A \cap B^c) \setminus A \cap B^c\big) \cap (A^c \cap B) \\ &\quad \sqcup \big(cl_X(A \cap B^c) \setminus A \cap B^c\big) \cap \big(cl_X(A^c \cap B) \setminus A^c \cap B\big), \end{aligned}$$

or cet ensemble semi-algébrique est de dimension $< k$ car pour tout semi-algébrique S, $\dim\big(cl(S) \setminus S\big) < \dim S$.

De même, $[cl_X(A \cap B^c)] + [cl_X(A \cap B)] = [cl_X(A \cap B \cup A \cap B^c)] = [cl_X(A)]$ et $[cl_X(A^c \cap B)] + [cl_X(A \cap B)] = [cl_X(B)]$, et on a donc finalement :

$$[cl_X(A \div B)] = [cl_X(A)] + [cl_X(B)] = \overline{c} + \overline{c'}.$$

□

Remarque 1.4.6. L'opération d'adhérence ne commute pas avec le morphisme de bord en général.

Définition 1.4.7. *Considérons le diagramme commutatif d'ensembles semi-algébriques localement fermés suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y} & \to & \widetilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

où $\pi : \widetilde{X} \to X$ est une application semi-algébrique continue propre, i est l'inclusion d'un sous-ensemble semi-algébrique fermé, $\widetilde{Y} = \pi^{-1}(Y)$, et la restriction $\pi : \widetilde{X} \setminus \widetilde{Y} \to X \setminus Y$ est un homéomorphisme.

Soient $k \geq 0$ et $c \in C_k(X)$. On définit le tiré en arrière $\pi^{-1}c \in C_k(\widetilde{X})$ de c par :

$$\pi^{-1}c := \overline{(\pi^{-1})_*(c|_{X \setminus Y})}.$$

Vérifions enfin la linéarité du tiré en arrière sur les chaînes semi-algébriques à supports fermés :

Proposition 1.4.8. *On reprend les notations de la définition précédente. Soit $k \geq 0$ et soient c et c' deux chaînes de $C_k(X)$. Alors $\pi^{-1}(c + c') = \pi^{-1}c + \pi^{-1}c'$.*

Démonstration. On utilise successivement la linéarité de la restriction, du poussé en avant et de l'adhérence. □

Remarque 1.4.9. Le tiré en arrière ne commute pas avec l'opérateur de bord en général.

1.5 Action de groupe

On suppose à présent que X est muni d'une action d'un groupe G qui agît par homéomorphismes semi-algébriques : pour tout $g \in G$, on note $\alpha_g : X \to X$ l'homéomorphisme semi-algébrique associé à g.

Par fonctorialité, on obtient alors une action sur le complexe $C_*(X)$ par isomorphismes linéaires donnée par ${\alpha_g}_* : C_*(X) \to C_*(X)$ pour $g \in G$. Le complexe $C_*(X)$ muni de cette action de G devient alors un G-complexe.

Lemme 1.5.1. *Soient Y un autre ensemble semi-algébrique localement compact muni d'une action de G et $f : X \to Y$ une application semi-algébrique continue propre et équivariante. Alors le poussé en avant f_* est équivariant par rapport aux actions de G sur les G-complexes $C_*(X)$ et $C_*(Y)$.*

Démonstration. Fonctorialité des chaînes semi-algébriques à supports fermés (1.3.1). □

L'action de G sur une chaîne semi-algébrique à support fermé peut être donnée par l'action sur l'un de ses représentants :

Proposition 1.5.2. *Soient $g \in G$ et $c = [A] \in C_k(X)$, alors*

$$g.c = [g.A].$$

Démonstration. On a $g.c := \alpha_{g_*}(c) = [B]$, où

$$B = cl\{x \in X \mid \alpha_{g_*}\mathbf{1}_A(x) = \chi(\alpha_g^{-1}(x) \cap A) \equiv 1 \bmod 2\ \}.$$

Or pour $x \in X$, $\chi(\alpha_g^{-1}(x) \cap A) = 1$ si $\alpha_g^{-1}(x) \in A$ i.e. $x \in \alpha_g(A)$, 0 si $\alpha_g^{-1}(x) \notin A$ i.e. $x \notin \alpha_g(A)$ (car α_g est un homéomorphisme). Donc $B = cl\,(\alpha_g(A)) = \alpha_g(A)$. □

A partir de cette constatation, on peut montrer simplement la commutativité de l'action avec les opérations de restriction, d'adhérence et le tiré en arrière :

Proposition 1.5.3. *Soit $Z \subset X$ un sous-ensemble semi-algébrique localement fermé globalement stable sous l'action de G. La restriction à Z des chaînes semi-algébriques à supports fermés de X commute avec l'action induite de G. De même, l'opération d'adhérence des chaînes semi-algébriques à support fermés de Z commute avec l'action induite de G.*

Démonstration. Soient $k \geq 0$ et $c = [A] \in C_k(X)$. Alors,

$$\begin{array}{rcl} g.(c|_Z) & = & g.[A \cap Z] \\ & = & [\alpha_g(A \cap Z)] \\ & = & [\alpha_g(A) \cap \alpha_g(Z)] \quad (\alpha_g \text{ bijection}) \\ & = & [\alpha_g(A) \cap Z] \quad (Z \text{ stable sous l'action de } G) \\ & = & [\alpha_g(A)]|_Z \\ & = & (g.c)|_Z \end{array}$$

Soient $k \geq 0$ et $c = [A] \in C_k(Z)$. Alors,

$$\overline{g.c} = [cl(\alpha_g(A)] = [\alpha_g(cl(A))] = g.[cl(A)] = g.\bar{c}.$$

□

Proposition 1.5.4. *On considère le diagramme commutatif d'ensembles semi-algébriques localement fermés suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y} & \to & \widetilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ Y & \stackrel{i}{\to} & X \end{array}$$

où $\pi : \widetilde{X} \to X$ est une application semi-algébrique continue propre, i est l'inclusion d'un sous-ensemble semi-algébrique fermé, $\widetilde{Y} = \pi^{-1}(Y)$, et la restriction $\pi : \widetilde{X} \setminus \widetilde{Y} \to X \setminus Y$ est un homéomorphisme, et où tous les objets sont munis d'une action de G et tous les morphismes sont équivariants par rapport à ces actions.

L'action de G sur les chaînes semi-algébriques à supports fermés commute alors avec le tiré en arrière.

Démonstration. L'action de G commute avec l'adhérence, le poussé en avant, la restriction donc avec le tiré en arrière. $\square$

Suite à ces premières définitions, nous allons tout d'abord passer en revue, dans le chapitre 2, différents résultats obtenus par C. McCrory et A. Parusiński dans leur article "The weight filtration for real algebraic varieties".

Dans le chapitre 3, nous nous placerons dans un cadre avec action du groupe G et nous munirons le complexe de poids de C. McCrory et A. Parusiński d'une action induite, ce qui nous permettra alors, dans le chapitre 4, de développer un pendant équivariant à leur travail.

Chapitre 2

Filtration par le poids pour les variétés algébriques réelles

On rappelle dans ce chapitre les résultats de [26]. Dans cet article, C. McCrory et A. Parusiński appliquent un critère de F. Guillén et V. Navarro Aznar dans [14] pour étendre le foncteur qui à toute variété algébrique réelle projective non-singulière associe son complexe des chaînes semi-algébriques à supports fermés muni de la filtration canonique en un foncteur associant à toute variété algébrique réelle un complexe filtré dit de poids, possédant des propriétés d'acyclité et d'additivité (2.2.1). Ce complexe de poids est fonctoriel par rapport aux morphismes propres réguliers.

L'homologie du complexe de poids d'une variété algébrique réelle est isomorphe à son homologie de Borel-Moore, sur laquelle la filtration du complexe de poids induit alors une filtration dite également par le poids, en analogie avec la filtration par le poids sur la cohomologie rationnelle des variétés algébriques complexes de P. Deligne ([8]). De plus, on retrouve les nombres de Betti virtuels ([25]) à partir de la page 2 de la suite spectrale de poids (2.3.4). Il est à noter que, contrairement au cas complexe, la suite spectrale de poids ne dégénère pas à la page 2 en général ([26] Example 1.11.).

C. McCrory et A. Parusiński donnent ensuite des réalisations pour ce complexe de poids défini à quasi-isomorphisme filtré près. La première d'entre elles est la réalisation par une hyperrésolution cubique pour une variété compacte (2.4.2), ce qui leur permet de montrer entre autres que la suite spectrale de poids est bornée. Dans un second point, ils définissent une filtration dite géométrique sur le complexe des chaînes semi-algébriques à supports fermés par récurrence sur la dimension, via des résolutions des singularités adaptées (2.5.1). Ce complexe filtré réalise alors le complexe de poids (2.5.7) et coïncide, sur les variétés algébriques réelles, avec la filtration Nash-contructible, définie sur la catégorie des ensembles $\mathcal{AS}$ via les fonctions Nash-constructibles (2.6.5).

Dans le chapitre suivant, on généralisera le complexe de poids aux variétés algébriques réelles avec action algébrique de groupe, en un complexe de poids avec action, et ceci grâce aux propriétés fonctorielles du complexe de poids.

2.1 Contexte

Dans ce qui suit, une variété algébrique réelle est un schéma réduit séparé de type fini sur $\mathbb{R}$, et une variété compacte est un schéma complet, i.e. propre sur $\mathbb{R}$.

Suivant C. McCrory et A. Parusiński qui, dans [26], reprennent eux-mêmes les notations de F. Guillén et V. Navarro Aznar dans [14], on note

- $\mathbf{Sch}_c(\mathbb{R})$ la catégorie des variétés algébriques réelles et des morphismes propres réguliers i.e. des morphismes propres de schémas,
- $\mathbf{Reg}_{comp}(\mathbb{R})$ la sous-catégorie des variétés compactes non singulières,
- $\mathbf{V}(\mathbb{R})$ la sous-catégorie des variétés projectives non singulières.

On va s'intéresser à la géométrie de l'ensemble des points réels des variétés algébriques réelles. Pour cela, si X est une telle variété algébrique réelle, on note

- $\underline{X}$ l'ensemble des points réels de X,
- $C_*(X)$ le complexe des chaînes semi-algébriques à supports fermés de $\underline{X}$,
- $H_*(X)$ l'homologie de $C_*(X)$, qui est l'homologie de Borel-Moore de $\underline{X}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$ (1.2).

L'autre catégorie à laquelle nous allons nous intéresser est la catégorie $\mathcal{C}$ des complexes bornés de $\mathbb{Z}_2$-espaces vectoriels munis d'une filtration croissante bornée, et des morphismes de complexes filtrés.

Tout élément (K_*, F_*) de $\mathcal{C}$ induit une suite spectrale $\{E^r, d^r\}$, avec

$$E^0_{p,q} = \frac{F_p K_{p+q}}{F_{p-1} K_{p+q}}, \qquad E^1_{p,q} = H_{p+q}\left(\frac{F_p K_*}{F_{p-1} K_*}\right),$$

convergeant vers l'homologie de K_* :

$$E^\infty_{p,q} = \frac{F_p(H_{p+q} K_*)}{F_{p-1}(H_{p+q} K_*)}$$

(où $F_p(H_n K_*) := im\ [H_n(F_p K_*) \to H_n(K_*)]$).

Remarquons ici que si un morphisme de $\mathcal{C}$ induit un isomorphisme au niveau des suites spectrales, il induira également un isomorphisme entre les homologies vers lesquelles celles-ci convergent.

On met ainsi en relief un type de morphisme de $\mathcal{C}$ auquel on va particulièrement s'intéresser :

Définition 2.1.1. *On appelle quasi-isomorphisme de $\mathcal{C}$ ou quasi-isomorphisme filtré un morphisme de complexes filtrés qui induit un isomorphisme au niveau E^1 des suites spectrales induites.*

On note également $H \circ \mathcal{C}$ la catégorie $\mathcal{C}$ localisée par rapport à ces quasi-isomorphismes filtrés. Autrement dit, la catégorie $H \circ \mathcal{C}$ est la catégorie $\mathcal{C}$ dans laquelle on inverse formellement les quasi-isomorphismes filtrés.

Exemple 2.1.2. La filtration canonique

Tout complexe borné K_* possède une filtration dite canonique, donnée par

$$F_p^{can}K_q = \begin{cases} K_q & \text{si } q > -p \\ ker\ \partial_q & \text{si } q = -p \\ 0 & \text{si } q < -p \end{cases}$$

On a $E^1_{p,q} = H_{p+q}\left(\frac{F_p^{can}K_*}{F_{p-1}^{can}K_*}\right) = \begin{cases} H_{p+q}(K_*) & \text{si } p+q=-p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, et ainsi un quasi-isomorphisme de complexes (i.e. un morphisme de complexes induisant un isomorphisme au niveau des homologies) induit un quasi-isomorphisme filtré de complexes munis de la filtration canonique.

Dans la suite, on aura également besoin de la notion de diagramme cubique :

Définition 2.1.3. *Pour $n \geq 0$, on note $\square_n^+$ l'ensemble partiellement ordonné (par l'inclusion) des sous-ensembles de $\{0,1,...,n\}$. Un diagramme cubique de type $\square_n^+$ dans une catégorie $\mathcal{X}$ est alors un foncteur contravariant de $\square_n^+$ dans $\mathcal{X}$.*

Exemple 2.1.4. Diagramme cubique dans $\mathcal{C}$ et complexe simple associé

Si $\mathcal{K}$ est un diagramme cubique de type $\square_n^+$ dans $\mathcal{C}$, on note $K_{*,S}$ le complexe du diagramme indexé par le le sous-ensemble S de $\{0,1,...,n\}$. On définit alors le complexe simple $\mathbf{s}\mathcal{K}$ associé à $\mathcal{K}$ par

$$(\mathbf{s}\mathcal{K})_k := \bigoplus_{i+|S|-1=k} K_{i,S}$$

(où $|S|$ est le nombre d'éléments de S) et les différentielles $\partial_k : (\mathbf{s}\mathcal{K})_k \to (\mathbf{s}\mathcal{K})_{k-1}$ sont définies comme suit. Pour chaque S, on note

$$\partial'_{i,S} : K_{i,S} \to K_{i-1,S}$$

la i-ème différentielle du complexe $K_{*,S}$, et si $T \subset S$ et $|T| = |S|-1$, on note $\partial_{T,S} : K_{*,S} \to K_{*,T}$ le morphisme de $\mathcal{C}$ correspondant à l'inclusion de T dans S. Pour $a \in K_{i,S}$, on note alors

$$\partial''_{i,S}(a) := \sum_{T\subset S,\ |T|=|S|-1} \partial_{T,S}(a),$$

et

$$\partial_{i,S}(a) := \partial'_{i,S}(a) + \partial''_{i,S}(a).$$

Enfin, si $\oplus_{i,S} a_{i,S} \in (\mathbf{s}\mathcal{K})_k$,

$$\partial_k(\oplus_{i,S} a_{i,S}) = \sum_{i,S} \partial_{i,S}(a_{i,S}).$$

On définit de plus une filtration sur $\mathbf{s}\mathcal{K}$ par $F_p\mathbf{s}\mathcal{K} := \mathbf{s}F_p\mathcal{K}$ $((F_p\mathbf{s}\mathcal{K})_k = \bigoplus_{i+|S|-1=k} F_p(K_{i,S}))$.

Exemple 2.1.5. Carré acyclique

Un carré acyclique est un $\square_1^+$-diagramme dans $\mathbf{Sch}_c(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y} & \to & \widetilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ Y & \stackrel{i}{\to} & X \end{array}$$

où i est l'inclusion d'une sous-variété fermée, $\widetilde{Y} = \pi^{-1}(Y)$, et la restriction $\pi : \widetilde{X} \setminus \widetilde{Y} \to X \setminus Y$ est un isomorphisme (remarquons que l'inclusion d'une sous-variété fermée $Y \subset X$ est un $\square_0^+$-diagramme dans $\mathbf{Sch}_c(\mathbb{R})$).

Un carré acyclique élémentaire est un carré acyclique tel que X est compacte et non singulière, et π est l'éclatement de X le long de Y.

2.2 Complexe de poids

Pour une variété algébrique réelle X, on note $F^{can}C_*(X)$ le complexe $C_*(X)$ muni de la filtration canonique.

Le résultat fondamental de C. McCrory et A. Parusiński dans [26] est la démonstration de l'existence et l'unicité d'un foncteur "additif" et "acyclique" (en un certain sens) défini sur la catégorie des variétés algébriques réelles considérée ici, et à valeurs dans la catégorie des complexes filtrés (localisée par rapport aux quasi-isomorphismes filtrés), qui coïncide avec $F^{can}C_*(X)$ dès que X est une variété projective lisse.

Le théorème est le suivant :

Théorème 2.2.1. ([26] Theorem 1.1) *Le foncteur*

$$F^{can}C_* : \mathbf{V}(\mathbb{R}) \longrightarrow H \circ \mathcal{C}$$

admet une extension en un foncteur

$$\mathcal{W}C_* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \longrightarrow H \circ \mathcal{C},$$

défini pour toutes les variétés algébriques réelles et tous les morphismes propres réguliers, qui vérifie les propriétés suivantes :

1. *Acyclicité : Pour tout carré acyclique 2.1.5, le complexe filtré simple du $\square_1^+$-diagramme dans $\mathcal{C}$*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W}C_*(\widetilde{Y}) & \to & \mathcal{W}C_*(\widetilde{X}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{W}C_*(Y) & \to & \mathcal{W}C_*(X) \end{array}$$

   est acyclique (i.e. isomorphe au complexe nul).

2. *Additivité : Pour une inclusion fermée $Y \subset X$, le complexe filtré simple du $\square_0^+$-diagramme dans $\mathcal{C}$*

$$\mathcal{W}C_*(Y) \to \mathcal{W}C_*(X)$$

   est isomorphe à $\mathcal{W}C_*(X \setminus Y)$.

Un tel foncteur $\mathcal{W}C_*$ est unique à un isomorphisme de $H \circ \mathcal{C}$ unique près.

Remarque 2.2.2. Les isomorphismes mentionnés dans le théorème ci-dessus sont des isomorphismes de la catégorie $H \circ \mathcal{C}$, i.e. des quasi-isomorphismes de $\mathcal{C}$, à savoir des morphismes de complexes filtrés qui induisent un isomorphisme au niveau E^1 des suites spectrales induites.

L'ingrédient clé de la preuve de ce théorème est un théorème d'extension de F. Guillén et V. Navarro Aznar issu de [14] :

Théorème 2.2.3. ([14] Théorème (2.2.2)) *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie de descente cohomologique et*

$$G : \mathbf{V}(\mathbb{R}) \longrightarrow H \circ \mathcal{C}$$

un foncteur contravariant Φ-rectifié qui vérifie

(F1) $G(\emptyset) = 0$, et le morphisme canonique $G(X \sqcup Y) \to G(X) \times G(Y)$ est un isomorphisme,

(F2) si $X_\bullet$ est un carré acyclique élémentaire de $\mathbf{V}(\mathbb{R})$, $\mathbf{s}G(X_\bullet)$ est acyclique.

Alors, il existe une extension de G en un foncteur contravariant Φ-rectifié

$$G_c : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{C}$$

telle que :

1. *si $X_\bullet$ est un carré acyclique de $\mathbf{Sch}_c(\mathbb{R})$, $\mathbf{s}G_c(X_\bullet)$ est acyclique,*
2. *si Y est une sous-variété fermée de X, on a un isomorphisme naturel*

$$G_c(X \setminus Y) \cong \mathbf{s}(G_c(X) \to G_c(Y)).$$

En outre, cette extension est unique, à isomorphisme unique près.

Plus précisément, pour montrer leur théorème, C. McCrory et A. Parusiński appliquent la version "opposée" de ce théorème (ils considèrent un foncteur covariant et l'étendent en un foncteur covariant) au foncteur $F^{can}C_* : \mathbf{V}(\mathbb{R}) \longrightarrow H \circ \mathcal{C}$ après avoir vérifié que celui-ci en vérifie bien les conditions.

Définition 2.2.4. *Si X est une variété algébrique réelle, le complexe filtré $\mathcal{W}C_*(X)$ est appelé le complexe de poids de X.*

Remarque 2.2.5. Le complexe de poids $\mathcal{W}C_*(X)$ de X est défini à quasi-isomorphisme filtré près.

Ce complexe de poids va nous permettre de définir une filtration sur l'homologie de la variété. En effet, on a :

Proposition 2.2.6. *Pour toute variété algébrique réelle X, l'homologie du complexe $\mathcal{W}C_*(X)$ est l'homologie de Borel-Moore de $\underline{X}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$:*

$$\forall n,\ H_n(\mathcal{W}C_*(X)) = H_n(X).$$

Idée de démonstration. On note $\mathcal{D}$ la catégorie des complexes bornés de $\mathbb{Z}_2$-espaces vectoriels. Le foncteur d'oubli de la filtration $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ induit un foncteur $\varphi : H \circ \mathcal{C} \to H \circ \mathcal{D}$.

On applique alors le critère d'extension de F. Guillén et V. Navarro Aznar en montrant que les foncteurs $C_* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{D}$ et $\varphi \circ \mathcal{W}C_* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{D}$ sont deux extensions du foncteur $C_* : \mathbf{V}(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{D}$ qui en vérifient les conditions.

On utilise alors l'unicité que nous fournit ce théorème pour obtenir que $\varphi(\mathcal{W}C_*(X))$ est quasi-isomorphe à $C_*(X)$ pour toute variété algébrique réelle X, i.e. pour tout n, $H_n(\mathcal{W}C_*(X)) = H_n(X)$. □

Remarque 2.2.7. Pour un carré acyclique 2.1.5, on a la suite exacte courte de complexes

$$0 \to C_*(\widetilde{Y}) \to C_*(Y) \oplus C_*(\widetilde{X}) \to C_*(X) \to 0,$$

et pour une inclusion fermée $Y \subset X$, on a la suite exacte courte

$$0 \to C_*(Y) \to C_*(X) \to C_*(X \setminus Y) \to 0.$$

2.3 Suite spectrale de poids et filtration par le poids

Soit X une variété algébrique réelle. Le complexe filtré de poids $\mathcal{W}C_*(X)$ induit une suite spectrale définie à partir du niveau E^1 :

Définition 2.3.1. *On appelle suite spectrale de poids la suite spectrale associée au complexe de poids $\mathcal{W}C_*(X)$ et notée $\{E^r, d^r\}_{r\geq 1}$.*

D'après ce que l'on a vu, la suite spectrale de poids converge vers l'homologie de X :

Définition 2.3.2. *La filtration de l'homologie de X induite par la filtration du complexe de poids est appelée filtration par le poids de X et notée $\mathcal{W}$.*

Par la suite seront définies plusieurs réalisations du complexe de poids, ou plus précisément de la suite spectrale de poids. En particulier, on peut la réaliser en considérant une hyperrésolution cubique de la variété algébrique réelle considérée et en lui associant un certain complexe filtré dont on détaillera la construction plus loin.

Cette réalisation nous permet de cerner les termes non nuls de la suite spectrale de poids dans un "triangle" :

Proposition et Définition 2.3.3. *Si $E^1_{p,q} \neq 0$ alors le point (p,q) se situe dans le triangle fermé de sommets $(0,0)$, $(0,d)$, $(-d,2d)$, où $d = dim\ X$.*

La réindexation

$$p' = 2p + q,\ q' = -p,\ r' = r + 1$$

permet d'obtenir une suite spectrale de premier quadrant ($\widetilde{E}^2_{p',q'} = E^1_{-q',p'+2q'}$) dont les termes non nuls se situent dans le triangle fermé de sommets $(0,0)$, $(d,0)$, $(0,d)$.

Cette réindexation va nous rendre plus facile la lecture de la suite spectrale de poids, notamment celle de ses lignes. En effet :

Proposition 2.3.4. *On retrouve les nombres de Betti virtuels de X à partir des lignes de $\widetilde{E}^2$:*

$$\beta_q(X) = \sum_p (-1)^p dim_{\mathbb{Z}_2} \widetilde{E}^2_{p,q},$$

pour tout q.

Autrement dit, pour tout q, la somme alternée des dimensions des termes de la ligne q est additive sur la catégorie des variétés algébriques réelles, et coïncide avec la dimension du q-ième groupe d'homologie si la variété est compacte non singulière.

Détaillons la preuve de cette propriété : elle nous permet d'une part de mieux comprendre la condition d'additivité du complexe de poids, et d'autre part de constater que $\mathcal{W}C_*(X)$ est isomorphe à $F^{can}C_*(X)$ dans $H \circ \mathcal{C}$ également dans le cas où X est compacte non singulière.

On donne tout d'abord la définition du "mapping cone" associé à un morphisme de complexes de chaînes, dont on aura besoin dans la démonstration de l'additivité :

Définition et Proposition 2.3.5. ([36]) *Soit $f_* : K_* \to M_*$ un morphisme de complexes de chaînes de $\mathbb{Z}_2$-espaces vectoriels. Le mapping cone $Cone(f_*)$ de f_* est le complexe de chaînes défini par*

$$\left(Cone(f_*)\right)_n = K_{n-1} \oplus M_n$$

pour tout n et de différentielle

$$d_n(x \oplus y) := \partial^K_{n-1}(x) \oplus \left(\partial^M_n(y) + f(x)\right).$$

La suite exacte courte de complexes

$$0 \to M_* \to Cone(f_*) \to K_*[-1] \to 0$$

(où $K_n[-1] = K_{n-1}$, le premier morphisme étant donné par $y \mapsto 0 \oplus y$ et le second par $x \oplus y \mapsto x$) induit une suite exacte longue d'homologie

$$\cdots \to H_n(K_*) \to H_n(M_*) \to H_n\left(Cone(f_*)\right) \to H_{n-1}(K_*) \to \cdots$$

Démonstration de 2.3.4. Pour une variété algébrique réelle X et un $q \in \mathbb{N}$ donné, on note $B_q(X) := \sum_p (-1)^p \dim_{\mathbb{Z}_2} \widetilde{E}^2_{p,q}$. On va alors montrer que $B_q(.)$ est additif, et égal au q-ième nombre de Betti classique sur les variétés compactes et non singulières, ce qui montrera que $B_q(.) = \beta_q(.)$ par unicité des nombres de Betti virtuels.

Additivité de B_q

Pour X une variété algébrique réelle et q fixés, on considère le complexe de chaînes noté $C_*(X,q)$ et défini par la q-ème ligne du terme $\widetilde{E}^1$ de X :

$$C_*(X,q) := (\widetilde{E}^1_{*,q}, \widetilde{d}^1_{*,q})$$

(ce complexe est défini à quasi-isomorphisme près).

Notons que pour tout p, $H_p(\widetilde{E}^1_{*,q}) = \widetilde{E}^2_{p,q}$ et, pour $X, Y \in \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R})$ tels que Y est une sous-variété fermée de X, écrivons la suite exacte longue

$$... \to H_p(C_*(Y,q)) \to H_p(C_*(X,q)) \to H_p(Cone(\nu)) \to H_{p-1}(C_*(Y,q)) \to ...,$$

associée au mapping cone du morphisme de complexes de chaînes $\nu : C_*(Y,q) \to C_*(X,q)$.

Or, par additivité du complexe de poids $\mathcal{W}C_*$, le complexe filtré $\mathcal{W}C_*(X \setminus Y)$ est isomorphe dans $H \circ \mathcal{C}$ au complexe simple filtré du diagramme $\mathcal{W}C_*(X) \to \mathcal{W}C_*(Y)$, ce qui se traduit au niveau des suites spectrales par : pour tout q, le complexe $C_*(X \setminus Y, q) = \widetilde{E}^1_{*,q}(X \setminus Y)$ est quasi-isomorphe au mapping cone $Cone(\nu)$.

Ainsi, la suite exacte longue devient

$$... \to \widetilde{E}^2_{p,q}(Y) \to \widetilde{E}^2_{p,q}(X) \to \widetilde{E}^2_{p,q}(X \setminus Y) \to \widetilde{E}^2_{p-1,q}(Y) \to ...$$

Cette dernière suite exacte longue (finie) est la bonne façon de comprendre cette additivité du complexe de poids. En prenant la somme alternée des dimensions, on obtient

$$B_q(X) = B_q(X \setminus Y) + B_q(Y)$$

pour tout q.

Egalité $B_q(X) = b_q(X)$ pour X compacte non singulière

Cette propriété repose sur le fait que si une variété algébrique réelle X est compacte non singulière, le complexe de poids $\mathcal{W}C_*(X)$ est isomorphe dans $H \circ \mathcal{C}$ à $F^{can}C_*(X)$. La preuve consiste en une extension (à la Guillén-Navarro Aznar) unique dans $H \circ \mathcal{C}$ du foncteur $F^{can}C_* : \mathbf{V}(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{C}$ en un foncteur $\mathbf{Reg}_{comp}(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{C}$ vérifiant des conditions d'additivité et d'acyclicité : comme $F^{can}C_* : \mathbf{Reg}_{comp}(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{C}$ et $\mathcal{W}C_* : \mathbf{Reg}_{comp}(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{C}$ les vérifient tous deux, ils sont isomorphes dans $H \circ \mathcal{C}$.

Cela se traduit alors au niveau des suites spectrales par la pureté du complexe de poids : $\widetilde{E}^2_{p,q} = 0$ pour $p \neq 0$, autrement dit seuls les termes de la colonne $p = 0$ sont potentiellement non nuls.

Dans ce cas, la suite spectrale de poids (réindexée) dégénère au niveau $\widetilde{E}^2$ et on a $\dim_{\mathbb{Z}_2} H_q(X) = \dim_{\mathbb{Z}_2} \widetilde{E}^2_{0,q} = B_q(X)$.

□

Remarque 2.3.6. Le fait que $\mathcal{W}C_*(X)$ soit isomorphe dans $H \circ \mathcal{C}$ à $F^{can}C_*(X)$ si X est compacte non singulière concerne en particulier tout représentant du complexe de poids.

2.4 Réalisation par une hyperrésolution cubique

La première réalisation donnée par C. McCrory et A. Parusiński de la suite spectrale de poids est la suite spectrale associée à une hyperrésolution cubique d'une variété algébrique réelle compacte.

Si X est une variété algébrique réelle compacte, une hyperrésolution cubique de X est un type spécial de $\square_n^+$-diagramme $S \mapsto X_S$ dans $\mathbf{Sch}_c(\mathbb{R})$, avec $n \in \mathbb{N}$, tel que $X_\emptyset = X$ et, pour tout sous-ensemble S de $\{0, 1, \ldots, n\}$ non vide, $X_S \in \mathbf{Reg}_{comp}(\mathbb{R})$. Pour la définition précise d'une hyperrésolution cubique, voir [15] Définition I.2.12. Voir aussi [28] chapitre 5.

Définition et Proposition 2.4.1. *Soit X une variété algébrique réelle compacte, et considérons une hyperrésolution cubique de X. Celle-ci est un $\square_n^+$-diagramme d'objet final X. En en ôtant X, on obtient un Δ_n-diagramme, i.e. un diagramme indexé par les simplexes contenus dans le n-simplexe standard Δ_n. On lui associe alors un complexe filtré de la façon suivante.*

Pour $k \geq 0$, on définit

$$C_k := \bigoplus_{i+j=k} C_j\left(X^{(i)}\right),$$

où $X^{(i)}$ est l'union disjointe des objets de l'hyperrésolution cubique indexés par les i-simplexes de Δ_n.

Pour $a \in C_j\left(X^{(i)}\right)$, on définit

$$\partial_{i,j}(a) := \partial'_i(a) + \partial''_j(a),$$

où $\partial'_i : C_j\left(X^{(i)}\right) \to C_j\left(X^{(i-1)}\right)$ est l'opérateur de bord simplicial, et $\partial''_j : C_j\left(X^{(i)}\right) \to C_{j-1}\left(X^{(i)}\right)$ est l'opérateur de bord sur les chaînes semi-algébriques, et si $\alpha = \sum_{i,j} a_{i,j} \in C_k = \bigoplus_{i+j=k} C_j\left(X^{(i)}\right)$,

$$\partial_k(\alpha) = \sum_{i,j} \partial_{i,j}(a_{i,j}).$$

(C_*, ∂_*) est alors un complexe de chaînes sur lequel on peut définir une filtration croissante bornée $\widehat{F}$ par les squelettes simpliciaux :

$$\widehat{F}_p C_k := \bigoplus_{i \leq p} C_{k-i}\left(X^{(i)}\right).$$

On note alors $\widehat{E}^r_{p,q}$ la suite spectrale induite par ce complexe filtré $(C_*, \widehat{F})$.

En utilisant l'acyclité du complexe de poids, et le fait que celui-ci coïncide avec la filtration canonique sur les différents objets de l'hyperrésolution cubique considérée (mis à part l'objet final X, ils sont tous compacts non singuliers), on montre que l'on a un isomorphisme entre la suite spectrale de poids et la suite spectrale de l'hyperrésolution cubique, obtenu en comparant la filtration canonique et la filtration $\widehat{F}$ sur le complexe C_* :

Proposition 2.4.2. *La suite spectrale de poids E de X est isomorphe à la suite spectrale $\widehat{E}$ d'une hyperrésolution cubique de X. Plus précisément,*

$$E^r_{p,q} \cong \widehat{E}^{r+1}_{2p+q,-p}.$$

Remarque 2.4.3. Ainsi, après réindexation, $\widetilde{E}^r_{p,q} \cong \widehat{E}^r_{p,q}$.

En utilisant alors cette réalisation de la suite spectrale de poids dans le cas compact, et une compactification couplée avec l'additivité du complexe de poids dans le cas non compact, on obtient une propriété énoncée plus haut :

Corollaire 2.4.4. *Soit X une variété algébrique réelle de dimension d, de suite spectrale de poids E et de filtration par le poids $\mathcal{W}$.*
Pour tous $r \geq 1$, p, q, si $E^r_{p,q} \neq 0$ alors $p \leq 0$ et $-2p \leq q \leq d - p$.

On en déduit enfin les "bornes" de la filtration par le poids :

Corollaire 2.4.5. *Pour X une variété algébrique réelle, on a, pour tout k,*

$$\mathcal{W}_0 H_k(X) = H_k(X), \text{ et } \mathcal{W}_{-k-1} H_k(X) = 0.$$

2.5 La filtration géométrique

Dans cette section, on définit un foncteur

$$\mathcal{G}C_* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}$$

dont C. McCrory et A. Parusiński montrent en plusieurs étapes dans la section 2 de [26] qu'il réalise le complexe de poids $\mathcal{W}C_* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{C}$.

Ce foncteur associe à toute variété algébrique réelle X le complexe $C_*(X)$ des chaînes semi-algébriques à supports fermés de l'ensemble de ses points réels, muni d'une filtration :

$$0 = \mathcal{G}_{-k-1} C_k(X) \subset \mathcal{G}_{-k} C_k(X) \subset \mathcal{G}_{-k+1} C_k(X) \subset ... \subset \mathcal{G}_0 C_k(X) = C_k(X).$$

Cette filtration est tout d'abord définie pour les variétés compactes, par récurrence sur la dimension des chaînes via la résolution des singularités :

Théorème et Définition 2.5.1. ([26] Theorem 2.1) *Il existe une unique filtration $\mathcal{G}$ sur les chaînes semi-algébriques des variétés algébriques réelles compactes avec les propriétés suivantes.*

Soient X une variété algébrique réelle compacte et soit $c \in C_k(X)$. Alors

1. *Si $Y \subset X$ est une sous-variété fermée telle que Supp $c \subset \underline{Y}$,*

$$c \in \mathcal{G}_p C_k(X) \Leftrightarrow c \in \mathcal{G}_p C_k(Y).$$

2. *Si $k = \dim X$, soit $\pi : \widetilde{X} \to X$ une résolution des singularités de X telle qu'il existe un diviseur à croisements normaux $D \subset \widetilde{X}$ avec Supp $\partial_k(\pi^{-1}c) \subset \underline{D}$ (une telle résolution est dite adaptée à c). Alors, pour $p \geq -k$,*

$$c \in \mathcal{G}_p C_k(X) \Leftrightarrow \partial_k(\pi^{-1}c) \in \mathcal{G}_p C_{k-1}(D).$$

Remarque 2.5.2. La preuve (par récurrence sur k) du fait que la condition (2) soit indépendante de la résolution adaptée choisie repose sur l'ingrédient suivant.

Soient $\pi_i : X_i \to X$, $i = 1, 2$, deux résolutions des singularités de X. Il existe alors un morphisme $\sigma : \widetilde{X}_1 \to X_1$, composé d'un nombre fini d'éclatements le long de centres lisses qui ont des croisements normaux avec les transformées strictes de tous les diviseurs exceptionnels, tel que $\pi_1 \circ \sigma$ puisse être factorisé par X_2.

Cette filtration dite géométrique est ensuite étendue à toute variété algébrique réelle en utilisant la compactification :

Définition et Proposition 2.5.3. *Soit U une variété algébrique réelle et soit X une compactification de U. Si $c \in C_k(U)$, on écrit que $c \in \mathcal{G}_p C_k(U)$ si $\overline{c} \in \mathcal{G}_p C_k(X)$. Cette définition est indépendante de la compactification choisie.*

Remarque 2.5.4. La preuve de l'indépendance repose d'une part sur le fait que l'on puisse dominer deux compactifications par une troisième, et d'autre part sur le lemme de Chow-Hironaka.

Cette filtration géométrique, définie géométriquement au niveau des chaînes, va réaliser le complexe de poids. En effet, nous verrons dans le point suivant que pour toute variété algébrique réelle projective non singulière M, le morphisme de complexes filtrés $\mathcal{G}C_*(M) \to F^{can}C_*(M)$ (pour toute variété algébrique réelle, la filtration géométrique est contenue dans la filtration canonique) est un quasi-isomorphisme filtré.

Or, le théorème suivant nous dit que le foncteur $\mathcal{G}C_* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}$ vérifie les conditions d'additivité et d'acyclicité, permettant d'affirmer que la filtration géométrique réalise le complexe de poids.

Théorème 2.5.5. *La filtration $\mathcal{G}_*$ définit un foncteur $\mathcal{G}C_* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}$ qui possède les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout carré acyclique 2.1.5, les suites*

$$0 \to \mathcal{G}_p C_k(\widetilde{Y}) \to \mathcal{G}_p C_k(Y) \oplus \mathcal{G}_p C_k(\widetilde{X}) \to \mathcal{G}_p C_k(X) \to 0$$

$$0 \to \frac{\mathcal{G}_p C_k(\widetilde{Y})}{\mathcal{G}_{p-1} C_k(\widetilde{Y})} \to \frac{\mathcal{G}_p C_k(Y)}{\mathcal{G}_{p-1} C_k(Y)} \oplus \frac{\mathcal{G}_p C_k(\widetilde{X})}{\mathcal{G}_{p-1} C_k(\widetilde{X})} \to \frac{\mathcal{G}_p C_k(X)}{\mathcal{G}_{p-1} C_k(X)} \to 0$$

   sont exactes.

2. *Pour une inclusion fermée $Y \subset X$, si $U := X \setminus Y$, les suites*

$$0 \to \mathcal{G}_p C_k(Y) \to \mathcal{G}_p C_k(X) \to \mathcal{G}_p C_k(U) \to 0$$

$$0 \to \frac{\mathcal{G}_p C_k(Y)}{\mathcal{G}_{p-1} C_k(Y)} \to \frac{\mathcal{G}_p C_k(X)}{\mathcal{G}_{p-1} C_k(X)} \to \frac{\mathcal{G}_p C_k(U)}{\mathcal{G}_{p-1} C_k(U)} \to 0$$

   sont exactes.

Remarque 2.5.6. La première suite exacte de (2) est scindée via le morphisme $\mathcal{G}_p C_k(U) \to \mathcal{G}_p C_k(X)$; $c \mapsto \overline{c}$.

Corollaire 2.5.7. ([26] Theorem 2.8) *La localisation du morphisme de foncteurs $\mathcal{G}C_* \to F^{can}C_*$ sur $\mathbf{V}(\mathbb{R})$ par rapport aux quasi-isomorphismes filtrés induit, pour toute variété réelle X, un isomorphisme $\mathcal{G}C_*(X) \to \mathcal{W}C_*(X)$ dans $H \circ \mathcal{C}$: la filtration géométrique $\mathcal{G}C_*$ réalise le complexe de poids $\mathcal{W}C_*$ dans $H \circ \mathcal{C}$.*

2.6 La filtration Nash-constructible

Dans cette section est défini un foncteur $\mathcal{N}C_*$ sur une catégorie plus grande que $\mathbf{Sch}_c(\mathbb{R})$, à savoir la catégorie des sous-ensembles $\mathcal{AS}$ localement compacts de variétés algébriques réelles. Cette extension est nécessaire à C. McCrory et A. Parusiński pour montrer que le foncteur restreint $\mathcal{N}C_* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}$ réalise le complexe de poids.

En conséquence de ce résultat, ils montrent que ce dernier foncteur coïncide (au niveau des chaînes) avec $\mathcal{G}C_* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}$ et donc que la filtration géométrique réalise bien elle-même le complexe de poids.

Nous aurons besoin de la définition d'un sous-ensemble $\mathcal{AS}$ de l'ensemble des points réels d'une variété algébrique réelle, et de celle d'une fonction Nash-constructible sur un tel ensemble.

Commençons par la définition d'une fonction Nash-constructible sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et d'un sous-ensemble $\mathcal{AS}$ de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$:

Définition 2.6.1. *Une fonction Nash-constructible sur* $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ *est une fonction constructible sur* $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ *que l'on peut écrire*

$$\varphi = \sum_{i \in I} m_i f_{i*} \mathbf{1}_{Z_i'}$$

où, pour tout $i \in I$*, l'application* $f_i : Z_i \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ *est une application rationnelle régulière définie sur un ensemble algébrique réel projectif* Z_i*,* Z_i' *est une composante connexe de* Z_i *et* m_i *est un entier.*

Un sous-ensemble S *de* $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ *qui est une combinaison booléenne de sous-ensembles semi-algébriques symétriques par arcs de* $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ *est appelé un ensemble* $\mathcal{AS}$*.*

La notion d'ensemble symétrique par arcs a été introduite par K. Kurdyka dans [18]. L'auteur y étudie les ensembles symétriques par arcs, ainsi que dans [19], un travail rédigé en commun avec A. Parusiński.

Proposition 2.6.2. ([19], [18]) *Un sous-ensemble* S *de* $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ *un ensemble* $\mathcal{AS}$ *si et seulement si la fonction caractéristique* $\mathbf{1}_S$ *sur* $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ *est Nash-constructible.*

Si S est un ensemble $\mathcal{AS}$ de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, on dit alors qu'une fonction sur S est Nash-constructible si c'est la restriction à S d'une fonction Nash-constructible sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Cela définit en particulier les fonctions Nash-constructibles sur les ensembles algébriques réels affines.

Soit X une variété algébrique réelle. On peut alors définir ce qu'est une fonction Nash-constructible sur l'ensemble des points réels $\underline{X}$ de X et ce qu'est un sous-ensemble $\mathcal{AS}$ de $\underline{X}$:

Définition 2.6.3. *Une fonction* $\varphi : \underline{X} \to \mathbb{Z}$ *est dite Nash-constructible si sa restriction à chaque carte affine est Nash-constructible.*

Un sous-ensemble S *de* $\underline{X}$ *est alors un ensemble* $\mathcal{AS}$ *si la fonction caractéristique* $\mathbf{1}_S$ *est Nash-constructible.*

Enfin, une fonction $\varphi : S \to \mathbb{Z}$ *sur un sous-ensemble* $\mathcal{AS}$ S *de* $\underline{X}$ *est dite Nash-constructible si son extension à* $\underline{X}$ *par zéro est Nash-constructible.*

Nous allons ainsi pouvoir enfin définir la catégorie dans laquelle nous allons travailler dans cette section :

Définition 2.6.4. *On note $\mathcal{X}_{\mathcal{AS}}$ la catégorie dont les objets sont les sous-ensembles $\mathcal{AS}$ de variétés algébriques réelles (du moins de leurs ensembles des points réels) et dont les morphismes sont les applications propres continues avec graphe $\mathcal{AS}$.*

Le foncteur $\mathcal{N}C_*$ va alors consister à associer à chaque objet de $\mathcal{X}_{\mathcal{AS}}$ une filtration dite Nash-constructible sur le complexe de ses chaînes semi-algébriques à supports fermés :

Définition 2.6.5. *Soit $T \in \mathcal{X}_{\mathcal{AS}}$.*

Soit $c \in C_k(T)$, et soit $-k \leq p \leq 0$. On dit que c est p-Nash-constructible et on écrit $c \in \mathcal{N}_p C_k(T)$, s'il existe $\varphi_{c,p} : T \to 2^{k+p}\mathbb{Z}$ génériquement Nash-constructible en dimension k (i.e. φ coïncide avec une fonction Nash-constructible sur T sauf sur un sous-ensemble semi-algébrique de T de dimension $< k$) telle que

$$c = [\{x \in T \mid \varphi_{c,p}(x) \notin 2^{k+p+1}\mathbb{Z}\}]$$

dans $C_k(X)$.

On caractérise en particulier les chaînes de $\mathcal{N}_{-k}C_k(T)$:

Définition et Proposition 2.6.6. *On dit que $c \in C_k(T)$ est pure si $c \in \mathcal{N}_{-k}C_k(T)$.*

Si T est compact, c est pure si et seulement si c peut être représentée par un ensemble symétrique par arcs.

Remarque 2.6.7. Si $\dim T = k$, $\mathcal{N}_0 C_k(T) = C_k(T)$. En effet, toute fonction constructible définie sur T et divisible par 2^k est Nash-constructible.

On obtient ainsi une filtration

$$0 = \mathcal{N}_{-k-1}C_k(T) \subset \mathcal{N}_{-k}C_k(T) \subset \mathcal{N}_{-k+1}C_k(T) \subset ... \subset \mathcal{N}_0 C_k(T) = C_k(T).$$

La filtration dite Nash-constructible ainsi définie induit bien une filtration de complexe. En effet, si $c \in \mathcal{N}_p C_k(T)$ est (à un ensemble de dimension plus petite près) le support modulo 2^{k+p+1} d'une fonction Nash-constructible $\varphi_{c,p} : T \to 2^{k+p}\mathbb{Z}$, le bord de c est le support de la fonction Nash-constructible $\frac{1}{2}\Lambda\varphi_{c,p}$ (resp. $\frac{1}{2}\Omega\varphi_{c,p}$) si k est impair (resp. pair).

Notons également la fonctorialité de la filtration Nash-constructible : si $f : T \to S$ est un morphisme propre continu de graphe $\mathcal{AS}$, et c est comme ci-dessus, f_*c est le support modulo 2^{k+p+1} du poussé en avant $f_*(\varphi_{c,p})$.

Ce que l'on peut donc appeler maintenant le foncteur $\mathcal{N}C_* : \mathcal{X}_{\mathcal{AS}} \to \mathcal{C}$ vérifie enfin les conditions d'additivité et d'acyclicité sur cette catégorie. Un carré acyclique dans $\mathcal{X}_{\mathcal{AS}}$ est un $\square_1^+$-diagramme dans $\mathcal{X}_{\mathcal{AS}}$

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{S} & \to & \widetilde{T} \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ S & \xrightarrow{i} & T \end{array}$$

où i est une inclusion fermée, $\widetilde{S} = \pi^{-1}(S)$, et la restriction $\pi : \widetilde{T} \setminus \widetilde{S} \to T \setminus S$ est un homéomorphisme.

Théorème 2.6.8. *La filtration $\mathcal{N}$ définit un foncteur $\mathcal{N}C_* : \mathcal{X}_{\mathcal{AS}} \to \mathcal{C}$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout carré acyclique dans $\mathcal{X}_{\mathcal{AS}}$, les suites*

$$0 \to \mathcal{N}_p C_k(\widetilde{S}) \to \mathcal{N}_p C_k(S) \oplus \mathcal{N}_p C_k(\widetilde{T}) \to \mathcal{N}_p C_k(T) \to 0$$

$$0 \to \frac{\mathcal{N}_p C_k(\widetilde{S})}{\mathcal{N}_{p-1} C_k(\widetilde{S})} \to \frac{\mathcal{N}_p C_k(S)}{\mathcal{N}_{p-1} C_k(S)} \oplus \frac{\mathcal{N}_p C_k(\widetilde{T})}{\mathcal{N}_{p-1} C_k(\widetilde{T})} \to \frac{\mathcal{N}_p C_k(T)}{\mathcal{N}_{p-1} C_k(T)} \to 0$$

   sont exactes.

2. *Pour une inclusion fermée $S \subset T$, la restriction à $U := T \setminus S$ induit un morphisme de complexes filtrés $\mathcal{N}C_*(T) \to \mathcal{N}C_*(U)$, et les suites*

$$0 \to \mathcal{N}_p C_k(S) \to \mathcal{N}_p C_k(T) \to \mathcal{N}_p C_k(U) \to 0$$

$$0 \to \frac{\mathcal{N}_p C_k(S)}{\mathcal{N}_{p-1} C_k(S)} \to \frac{\mathcal{N}_p C_k(T)}{\mathcal{N}_{p-1} C_k(T)} \to \frac{\mathcal{N}_p C_k(U)}{\mathcal{N}_{p-1} C_k(U)} \to 0$$

   sont exactes.

Remarque 2.6.9. Pour k fixé, le morphisme $\mathcal{N}_* C_k(T) \to \mathcal{N}_* C_k(U)$ se scinde en associant à une chaîne $c \in \mathcal{N}_p C_k(U)$ son adhérence $\overline{c} \in C_k(T)$ (cependant ce dernier morphisme ne commute pas avec l'opérateur de bord).

En particulier, la restriction du foncteur $\mathcal{N}C_*$ à la catégorie des variétés algébriques réelles que l'on considère vérifie également ces conditions d'additivité et d'acyclicité.

Pour montrer qu'il réalise le complexe de poids, il ne reste donc plus qu'à montrer qu'il coïncide (à quasi-isomorphisme filtré près) avec la filtration canonique sur les variétés projectives lisses. C'est à cette dernière intention que le foncteur $\mathcal{N}C_*$ a été défini sur la catégorie des ensembles $\mathcal{AS}$.

En effet, C. McCrory et A. Parusiński considèrent la catégorie des variétés Nash compactes et des morphismes Nash entre elles, qui contient les composantes connexes des variétés affines compactes (resp. projectives) non singulières et est contenue dans la catégorie $\mathcal{X}_{\mathcal{AS}}$, et montrent que, pour N une variété Nash compacte, le morphisme $\mathcal{N}C_*(N) \to F^{can}C_*(N)$ (induit par l'inclusion $\mathcal{N}_p C_k(N) \subset F^{can}_p C_k(N)$) est un quasi-isomorphisme filtré.

Théorème 2.6.10. *Pour toute variété Nash compacte N, le morphisme*

$$\mathcal{N}C_*(N) \to F^{can}C_*(N)$$

est un quasi-isomorphisme filré.

Idée de démonstration. Plus particulièrement, ils montrent que ce morphisme induit des isomorphismes $H_k(\mathcal{N}_p C_k(N)) \cong H_k(F^{can}_p C_k(N))$ (qui, via les suites exactes longues des paires, impliquent l'isomorphisme du théorème).

Pour cela, ils utilisent des théorèmes profonds du cadre des variétés lisses et des variétés Nash qui, en utilisant la fonctorialité de $\mathcal{N}C_*$ par rapport aux applications Nash ainsi que son acyclicité, leur permettent de se ramener à un cas particulier.

Précisément, pour montrer que l'on peut relier deux variétés Nash compactes connexes par un difféomorphisme Nash après multi-éclatements, ils appliquent un résultat de G. Mikhalkin dans [27] (qui nous dit que l'on peut relier deux variétés lisses fermées de même dimension par une suite d'éclatements et d'écrasements le long de centres lisses), puis le théorème de Nash-Tognoli ([33]) couplé avec des théorèmes d'approximation par des applications Nash.

□

Comme les variétés algébriques réelles projectives lisses peuvent être considérées comme des variétés Nash compactes, on obtient finalement que :

Corollaire 2.6.11. ([26] Corollary 3.11) *Pour toute variété algébrique réelle X, la localisation du morphisme de foncteurs $\mathcal{N}C_* \to F^{can}C_*$ sur $\mathbf{V}(\mathbb{R})$ par rapport aux quasi-isomorphismes filtrés induit un isomorphisme dans $H \circ \mathcal{C}$*

$$\mathcal{N}C_*(X) \to \mathcal{W}C_*(X).$$

Un corollaire de ce dernier fait est que la filtration Nash-constructible coïncide sur $\mathbf{Sch}_c(\mathbb{R})$ au niveau des chaînes avec la filtration géométrique, montrant du même coup que cette dernière réalise donc bien le complexe de poids au niveau des suites spectrales.

Corollaire 2.6.12. ([26] Corollary 3.12) *Soit X une variété algébrique réelle. Alors pour tout k, pour tout p,*

$$\mathcal{N}_pC_k(X) = \mathcal{G}_pC_k(X).$$

Remarque 2.6.13. Dans la démonstration de ce corollaire, C. McCrory et A. Parusiński montrent et utilisent notamment le fait que si X est une variété algébrique réelle compacte non-singulière de dimension d, et si c est une d-chaîne de X, alors

$$c \in \mathcal{N}_pC_d(X) \Leftrightarrow \partial c \in \mathcal{N}_pC_{d-1}(X).$$

Ce dernier corollaire permet ainsi à C. McCrory et A. Parusiński d'obtenir entre autres un critère pour montrer la coïncidence modulo une certaine puissance de 2 d'une fonction constructible avec une fonction Nash-constructible :

Théorème 2.6.14. ([26] Theorem 4.10) *Soit V un sous-ensemble algébrique réel de $\mathbb{R}^N$ irréductible. Soit $\varphi : V \to \mathbb{Z}$ une fonction constructible. On suppose que φ vérifie*

$$\sum_{\sigma \in F} \varphi(\sigma) \equiv 0 \ mod \ |F|$$

pour tout éventail F du corps $K = K(V)$ des fonctions rationnelles de V, dont le corps résiduel induit seulement un ordre, et de cardinal $|F| \leq 2^n$.

Alors il existe une fonction $\psi : V \to \mathbb{Z}$ génériquement Nash-constructible telle que, pour tout $x \in V$,

$$\varphi(x) \equiv \psi(x) \ mod \ 2^n.$$

On utilisera ce résultat dans la démonstration de 3.4.6. On utilisera également le critère de l'éventail d'I. Bonnard ([5]) :

Théorème 2.6.15. ([5]) *On reprend les données du théorème précédent. Une fonction constructible $\varphi : V \to \mathbb{Z}$ est génériquement Nash-constructible si et seulement si, pour tout éventail fini F de K dont le corps résiduel n'induit qu'un ordre,*

$$\sum_{\sigma \in F} \varphi(\sigma) \equiv 0 \ mod\ |F|.$$

Enfin, terminons cette partie en calculant les suites spectrales de poids et filtrations par le poids pour quelques exemples, en utilisant la réalisation du complexe de poids par la filtration Nash-constructible :

Exemple 2.6.16. On considère le sous-ensemble algébrique réel X de $\mathbb{R}^2$ d'équation $y^2 = x^2 - x^4$. La suite spectrale de poids est donnée au niveau $\widetilde{E}^2$ par

$$\widetilde{E}^2_{p,q} = H_{p+q}\left(\frac{\mathcal{N}_{-q}C_*}{\mathcal{N}_{-q-1}C_*}\right),$$

et la filtration par le poids par

$$\mathcal{W}_l H_k = \bigoplus_{p+q=k,\ p \leq k+l} \widetilde{E}^{\infty}_{p,q}$$

Or, comme X est de dimension 1, le $\mathbb{Z}_2$-espace vectoriel $\mathcal{N}_{-1}C_1(X)$ est engendré par les composantes symétriques par arcs de X, qui n'en a qu'une, à savoir lui-même. Le terme $\widetilde{E}^2(X)$ est donc

$$\begin{array}{cc} \mathbb{Z}_2[X] & \\ \mathbb{Z}_2[\{p_0\}] & \mathbb{Z}_2[X_1] \end{array}$$

où p_0 est un point de X, et où X_1 et X_2 sont les deux cycles de dimension 1 de X. La suite spectrale dégénère au niveau $\widetilde{E}^2(X)$ et on a alors

$$\mathcal{W}_{-1}H_1(X) = \mathbb{Z}_2[X]$$

et

$$\mathcal{W}_0 H_1(X) = H_1(X) = \mathbb{Z}_2[X] \oplus \mathbb{Z}_2[X_1] = \mathbb{Z}_2[X_1] \oplus \mathbb{Z}_2[X_2].$$

Exemple 2.6.17. On considère cette fois la courbe algébrique réelle X du plan $\mathbb{R}^2$ constituée de deux cercles s'intersectant en l'origine, définie par l'équation $\left((x+1)^2 + y^2 - 1\right)\left((x-1)^2 + y^2 - 1\right) = 0$. Le $\mathbb{Z}_2$-espace vectoriel $\mathcal{N}_{-1}C_1(X)$ est ici engendré par les deux cercles X_1 et X_2. Le terme $\widetilde{E}^2(X)$ est

$$\begin{array}{cc} \mathbb{Z}_2[X_1] \oplus \mathbb{Z}_2[X_2] & \\ \mathbb{Z}_2[\{p_0\}] & 0 \end{array}$$

La suite spectrale dégénère au niveau $\widetilde{E}^2(X)$ et on a

$$\mathcal{W}_{-1}H_1(X) = \mathcal{W}_0 H_1(X) = H_1(X) = \mathbb{Z}_2[X_1] \oplus \mathbb{Z}_2[X_2].$$

Chapitre 3

Complexe de poids avec action

Soit G un groupe fini.

On souhaite à présent construire une filtration par le poids, analogue à celle de C. McCrory et A. Parusiński, pour les variétés algébriques réelles munies d'une action du groupe G (par isomorphismes algébriques), sur une homologie équivariante qui rendrait compte "convenablement" de la géométrie de telles variétés ainsi que de l'action de groupe.

Notre stratégie va alors se développer en deux étapes. Dans la première, on va définir (3.2.3) un complexe de poids avec action de G sur la catégorie de ce que l'on appellera les G-variétés algébriques réelles, fonctoriel par rapport aux morphismes propres réguliers équivariants, et unique à quasi-isomorphisme filtré équivariant près avec les propriétés d'extension, d'acyclicité et d'additivité analogues à celles du cadre sans action. Pour son existence, cela consistera à munir le complexe de poids de McCrory-Parusiński de l'action de G induite par fonctorialité. Quant à son unicité, elle sera donnée par une version avec action du critère d'extension de F. Guillén et V. Navarro Aznar, qui justifie la restriction au cas d'un groupe fini pour lequel il existe une compactification équivariante, un lemme de Chow-Hironaka équivariant ainsi qu'une résolution des singularités équivariante.

Dans un second temps, on appliquera à ce complexe de poids avec action un foncteur noté L^G qui, appliqué à un G-complexe de chaînes, permet par définition de calculer l'homologie de G à coefficients dans ce complexe, et qui induira alors une filtration par le poids que l'on dira équivariante sur l'homologie équivariante qu'il définit.

Le choix du cas d'un groupe fini est également motivé par l'application aux produits de filtrations par le poids équivariantes qui nécessitera la prise en compte de groupes finis. Mais on verra également que dès le plus petit d'entre eux (non trivial), à savoir $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, les structures avec action et donc équivariantes s'enrichiront considérablement (voir dans ce chapitre, les sections 3.3 et 3.4).

3.1 Contexte

Tout d'abord, définissons précisément les catégories sur lesquels nous allons travailler. Dans toute la suite, une action de G par isomorphismes algébriques sur une variété algébrique réelle X désignera une action par isomorphismes de schémas telle que l'orbite de tout point de X est contenue dans un sous-schéma ouvert affine.

Définition 3.1.1. *On note*
- $\mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$ *la catégorie des variétés algébriques réelles munies d'une action de G par isomorphismes algébriques -on nomme de tels objets des G-variétés algébriques réelles- et des morphismes propres réguliers équivariants,*
- $\mathbf{Reg}_{comp}^G(\mathbb{R})$ *la sous-catégorie des G-variétés compactes non singulières,*
- $\mathbf{V}^G(\mathbb{R})$ *la sous-catégorie des G-variétés projectives non singulières.*

On note également
- $\mathcal{C}^G$ *la catégorie des G-complexes de $\mathbb{Z}_2$-espaces vectoriels bornés munis d'une filtration croissante bornée par des G-complexes avec inclusions équivariantes -on nomme de tels objets des G-complexes filtrés- et des morphismes de complexes filtrés équivariants,*
- $\mathcal{D}^G$ *la catégorie des G-complexes bornés et des morphismes de complexes équivariants.*

Remarque 3.1.2.
- Si X est une G-variété algébrique réelle, on a vu que l'action de G sur X induit, par fonctorialité de $C_* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}$, une action de G sur $C_*(X)$, et donc également une action (linéaire) sur l'homologie de Borel-Moore $H_*(X)$ de l'ensemble des points réels de X. On a ainsi un foncteur
$$C_* : \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}^G \ ; \ X \mapsto C_*(X).$$
- Si (K_*, F_*) est un G-complexe filtré, la suite spectrale induite est naturellement munie d'une action de groupe : chaque terme est muni de l'action de G induite, et les différentielles sont équivariantes pour celle-ci.
- Le complexe simple filtré associé à un diagramme cubique dans $\mathcal{C}^G$ peut être naturellement muni de l'action du groupe G induite (en considérant l'action diagonale sur les sommes directes), et devenir ainsi un élément de $\mathcal{C}^G$.

Dans la continuité de ce que l'on faisait dans le cadre sans action de groupe, on s'intéresse aux morphismes filtrés qui induisent des isomorphismes au niveau des suites spectrales :

Définition 3.1.3. *On note $H \circ \mathcal{C}^G$ la catégorie $\mathcal{C}^G$ localisée par rapport aux quasi-isomorphismes filtrés équivariants, autrement appelés quasi-isomorphismes de $\mathcal{C}^G$, i.e. les morphismes filtrés équivariants entre G-complexes filtrés qui induisent un isomorphisme (équivariant) au niveau E^1 des suites spectrales induites.*

Remarque 3.1.4. Tout G-complexe K_* de $\mathcal{D}^G$ peut être muni de la filtration canonique sur laquelle agit naturellement le groupe G (le noyau de la différentielle de K, qui est équivariante, est stable sous l'action de G), et ainsi (K_*, F_*^{can}) est un élément de $\mathcal{C}^G$.

De cette façon, un quasi-isomorphisme équivariant entre G-complexes bornés induit un quasi-isomorphisme filtré équivariant entre G-complexes filtrés munis de la filtration canonique.

3.2 Complexe de poids avec action

Nous allons à présent pouvoir énoncer le théorème d'existence et d'unicité (dans $H \circ \mathcal{C}^G$) du complexe de poids avec action du groupe G.

L'existence sera donnée directement par la fonctorialité du complexe de poids (sans action). Son unicité requerra une version avec action du critère d'extension de F. Guillén et V. Navarro Aznar ([14]) :

Théorème 3.2.1. *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie de descente cohomologique et*

$$F : \mathbf{V}^G(\mathbb{R}) \longrightarrow H \circ \mathcal{C}$$

un foncteur contravariant Φ-rectifié qui vérifie

(F1) $F(\emptyset) = 0$, et le morphisme canonique $F(X \sqcup Y) \to F(X) \times F(Y)$ est un isomorphisme (dans $H \circ \mathcal{C}$),

(F2) si $X_\bullet$ est un carré acyclique élémentaire de $\mathbf{V}^G(\mathbb{R})$, $\mathbf{s}F(X_\bullet)$ est acyclique.

Alors, il existe une extension de F en un foncteur contravariant Φ-rectifié

$$F_c : \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{C}$$

telle que :

1. *si $X_\bullet$ est un carré acyclique de $\mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$, $\mathbf{s}F_c(X_\bullet)$ est acyclique,*
2. *si Y est une sous-variété fermée de X stable sous l'action de G sur X, on a un isomorphisme naturel (dans $H \circ \mathcal{C}$)*

$$F_c(X \setminus Y) \cong \mathbf{s}(F_c(X) \to F_c(Y)).$$

En outre, cette extension est unique, à isomorphisme unique près.

Remarque 3.2.2. Le critère d'extension ([14]) reste bien valable dans ce contexte. En effet, celui-ci nécessite, sur la catégorie de variétés considérée, une résolution des singularités, un lemme de Chow-Hironaka et une compactification. Or, sur la catégorie $\mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$, comme le groupe G est d'ordre fini, une résolution des singularités équivariante, un lemme de Chow-Hironaka équivariant ainsi qu'une compactification équivariante existent par [9] (Appendix).

Théorème 3.2.3. *Le foncteur*

$$F^{can}C_* : \mathbf{V}^G(\mathbb{R}) \longrightarrow H \circ \mathcal{C}^G \ ; \ X \mapsto F^{can}C_*(X)$$

admet une extension en un foncteur

$${}^G\mathcal{W}C_* : \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R}) \longrightarrow H \circ \mathcal{C}^G$$

défini pour toutes les G-variétés algébriques réelles et tous les morphismes propres réguliers équivariants, qui vérifie les propriétés suivantes :

1. *Acyclicité : Pour tout carré acyclique dans $\mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$, le complexe filtré simple du $\square_1^+$-diagramme dans $\mathcal{C}^G$*

$$\begin{array}{ccc} {}^G\mathcal{W}C_*(\widetilde{Y}) & \to & {}^G\mathcal{W}C_*(\widetilde{X}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}^G\mathcal{W}C_*(Y) & \to & {}^G\mathcal{W}C_*(X) \end{array}$$

est acyclique.

2. *Additivité : Pour une inclusion fermée équivariante $Y \subset X$, le complexe filtré simple du $\square_0^+$-diagramme dans $\mathcal{C}^G$*
$$^G\mathcal{W}C_*(Y) \to {}^G\mathcal{W}C_*(X)$$
est isomorphe à $^G\mathcal{W}C_*(X \setminus Y)$.

Un tel foncteur $^G\mathcal{W}C_*$ est unique à un isomorphisme de $H \circ \mathcal{C}^G$ unique près.

Démonstration. **Existence**

Soit X une G-variété algébrique réelle. On a une action de G sur le complexe filtré de poids $\mathcal{W}C_*(X)$ de X induite par fonctorialité du complexe de poids.

De plus, tout morphisme propre régulier équivariant induira, toujours par fonctorialité de $\mathcal{W}C_*$, un morphisme de $H \circ \mathcal{C}$ équivariant, i.e. un morphisme de $H \circ \mathcal{C}^G$.

On obtient donc ainsi un foncteur $^G\mathcal{W}C_* : \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{C}^G$, celui qui à toute G-variété algébrique réelle X associe son complexe filtré de poids $\mathcal{W}C_*(X)$ muni de l'action induite.

Ce foncteur est bien une extension de $F^{can}C_* : \mathbf{V}^G(\mathbb{R}) \longrightarrow H \circ \mathcal{C}^G$ car le complexe de poids $\mathcal{W}C_* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \longrightarrow H \circ \mathcal{C}$ est une extension de $F^{can}C_* : \mathbf{V}(\mathbb{R}) \longrightarrow H \circ \mathcal{C}$ (pour $X \in \mathbf{V}^G(\mathbb{R})$, l'action sur le complexe filtré $F^{can}C_*(X)$ est également induite par fonctorialité).

Il vérifie enfin les conditions d'acyclicité et d'additivité (le morphisme nul est équivariant et, dans le théorème de Guillén-Navarro Aznar, la condition d'additivité repose sur une égalité permettant l'extension du foncteur aux variétés non compactes, ce qui la rend a fortiori équivariante).

Unicité

Pour l'unicité, nous utiliserons le critère d'extension de Guillén-Navarro Aznar ([14] (2.2.2)) adapté au cadre avec action du groupe G que l'on a énoncé précédemment (3.2.1). Appliquons-le (tout du moins sa version homologique et covariante) à notre contexte pour obtenir l'unicité du complexe de poids avec action de G :

- $\mathcal{C}^G$ est une catégorie de descente homologique, en tant que catégorie des complexes de chaînes de $\mathbb{Z}_2[G]$-modules à gauche (i.e. les $\mathbb{Z}_2$-espaces vectoriels munis d'une action linéaire du groupe G), bornés et munis d'une filtration croissante bornée. En effet, les $\mathbb{Z}_2[G]$-modules à gauche forment une catégorie abélienne (on utilise ici la propriété (1.7.5) de l'article de F. Guillén et V. Navarro Aznar).
- Le foncteur $F^{can}C_*$ est Φ-rectifié, car il est défini sur la catégorie $\mathcal{C}^G$.
- Le foncteur $F^{can}C_*$ vérifie les conditions (F1) et (F2) dans le cadre sans action. Munissant les variétés projectives lisses d'une action agébrique de G, tous les morphismes mentionnés, induits par l'application du foncteur $F^{can}C_*$, sont alors équivariants, et celui-ci vérifie donc bien les conditions (F1) et (F2) dans le cadre avec action de G.

□

Définition 3.2.4. *Si X est une G-variété réelle, le G-complexe filtré $^G\mathcal{W}C_*(X)$ (défini à quasi-isomorphisme filtré équivariant près) est appelé le complexe de poids avec action de X.*

Remarque 3.2.5. – L'isomorphisme $H_n({}^G\mathcal{W}C_*(X)) \cong H_n(X)$ pour toute G-variété réelle X est équivariant. En effet, on a vu dans la preuve de 2.2.6 que les foncteurs $C_* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{D}$ et $\varphi \circ \mathcal{W}C_* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{D}$ sont isomorphes. Ainsi, si X est une G-variété algébrique réelle, le quasi-isomorphisme entre $\varphi \circ \mathcal{W}C_*(X)$ et $C_*(X)$ est équivariant par rapport aux actions induites par fonctorialité.

– La filtration par le poids et la suite spectrale de poids se retrouvent munies de l'action induite du groupe G.

– La filtration géométrique, munie de l'action de G induite par fonctorialité, réalise le complexe de poids avec action des G-variétés algébriques réelles. En effet, lorsque l'on munit les variétés considérées d'une action algébrique de G, les morphismes des suites exactes courtes de 2.5.5 sont équivariants pour les actions induites, ainsi que les inclusions $\mathcal{G}_pC_k(X) \subset F_p^{can}C_k(X)$ pour toute G-variété réelle X.

– Comme dans le cadre sans action (2.3.6), le complexe de poids ${}^G\mathcal{W}C_*(X)$ avec action de G d'une variété compacte non singulière est quasi-isomorphe dans $\mathcal{C}^G$ à $F^{can}C_*(X)$. Il en va de même pour toutes ses réalisations.

Dans la suite, le complexe de poids avec action d'une G-variété réelle X sera simplement noté $\mathcal{W}C_*(X)$ lorsque le contexte sera explicite.

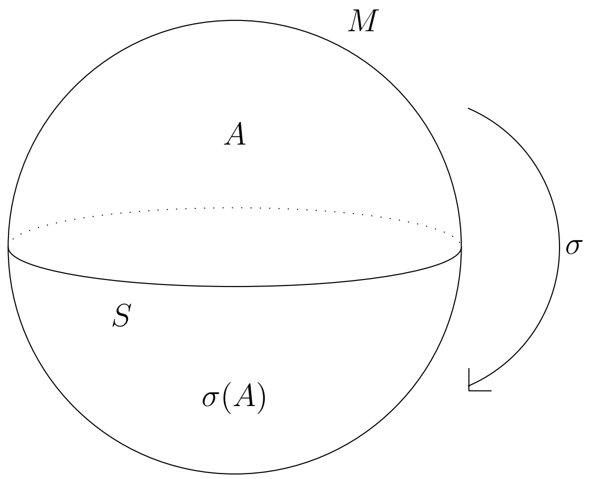
3.3 Le découpage d'une variété Nash affine compacte munie d'une action de $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

On souhaite découper toute chaîne invariante d'une variété algébrique réelle avec action de $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, \sigma\}$, après en avoir retiré la partie invariante point par point, en deux morceaux qui soient l'image l'un de l'autre par l'involution σ, mais des morceaux dont on puisse contrôler la régularité vis-à-vis de la filtration Nash-constructible.

On s'intéresse au cas particulier du groupe à deux éléments car il est le premier cas difficile, tant pour cette question que pour la suite de notre étude. Ainsi, nous utiliserons ce résultat dans 5.2.6, afin de mieux comprendre des invariants additifs construits à partir d'une suite spectrale pour laquelle le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ fournit déjà une grande richesse d'informations et donc une plus grande difficulté à la comprendre.

L'ingrédient-clé qui nous permettra d'effectuer ce découpage sera le résultat suivant. Ce théorème affirme que l'on peut découper toute variété Nash affine compacte connexe munie d'une involution algébrique le long d'un sous-ensemble symétrique par arcs, globalement invariant sous l'action. On renvoie à [31] pour tout le matériel concernant les variétés Nash et les fonctions Nash.

Théorème 3.3.1. *Soit M une sous-variété Nash compacte connexe d'un espace affine $\mathbb{R}^N$ munie d'une involution algébrique σ (i.e. la restriction d'une involution algébrique sur l'adhérence de Zariski de M) non triviale. Alors il existe un sous-ensemble symétrique par arcs S de M de codimension 1 globalement stable sous l'action de σ, et un sous-ensemble semi-algébrique fermé A de M tels que $M = A \cup \sigma(A)$, $S = A \cap \sigma(A)$ et $S = \partial A$.*



Démonstration. La démonstration de ce résultat va se baser sur l'obtention d'une application classifiante entre le quotient de M privé de ses points fixes, que l'on notera N, par l'action de G et un espace projectif réel. On approchera cette fonction, tout du moins son extension à la compactificaction Nash de N/G, via le théorème de Stone-Weierstrass et l'utilisation d'un voisinage tubulaire Nash ([4]8.9), par une fonction Nash, transverse au sous-espace projectif de codimension 1, que l'on relèvera ensuite en une fonction équivariante définie sur $M \setminus M^G$ et à valeurs dans une sphère munie de l'action antipodale, Nash et transverse à la sphère de codimension 1. Considérant alors l'image réciproque de celle-ci, ainsi que celles des deux hémisphères, auxquels on rajoute les points fixes, on parvient à découper M en deux sous-ensembles semi-algébriques, images l'une de l'autre par l'involution, le long d'un sous-ensemble symétrique par arcs.

(i) Quotient Considérons donc N la variété M privée de ses points fixes. N est une sous-variété Nash de $\mathbb{R}^N$, de même dimension que M (car l'action de G sur M n'est pas triviale) et munie d'une action libre de G (où $G = \{id, \sigma\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Le quotient N/G est une variété Nash. En effet, le quotient d'un ensemble semi-algébrique par l'action (semi-algébrique) d'un groupe est un ensemble semi-algébrique ([29]), et le quotient d'une variété (différentiable) lisse par l'action libre (et lisse) d'un groupe fini est une variété lisse ([20] Theorem 7.10). La variété Nash N/G est de plus affine, en tant que sous-ensemble (semi-algébrique) de l'ensemble des points réels du quotient de la complexification de l'adhérence de Zariski de M, qui est une variété complexe projective, par la complexification de l'action de G, quotient qui est lui aussi une variété projective complexe.

(ii) Compactification La variété N/G étant une variété Nash affine, on peut la compactifier en une variété Nash affine avec bord d'après le théorème VI.2.1. de [31]. Plus précisément, il existe une variété algébrique affine compacte non-singulière X', une sous-variété algébrique non-singulière Y' de codimension 1 (vide si N/G est compacte i.e. si $M^G = \emptyset$), une composante connexe N' de $X \setminus Y$ telles qu'il existe un difféomorphisme Nash $\psi : N/G \to N'$ et $M' := cl(N')$ est une variété Nash à bord compacte (connexe), de bord Y.

(iii) Application classifiante Le groupe $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agissant librement sur la variété lisse N, on peut considèrer le $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-fibré principal lisse $\Pi : N \to N/G$ ainsi qu'une application classifiante lisse $f : N/G \to \mathbb{P}^M(\mathbb{R})$ ([17]). Remarquons que "l'" application classifiante est définie à homotopie près. Aussi, notre but va être dès à présent de construire une application classifiante $h : N/G \to \mathbb{P}^M(\mathbb{R})$ qui sera Nash et transverse à $\mathbb{P}^{M-1}(\mathbb{R})$.

(iv) Extension On commence pour cela par composer f par ψ^{-1} : on obtient une application lisse $f' := f \circ \psi^{-1} : N' \to \mathbb{P}^M(\mathbb{R})$. Puis on étend à homotopie près l'application f' à la compactification Nash M' de N', ceci grâce à une propriété énoncée par M. Shiota dans [31]. L'application f' étant en effet une application continue entre $N' = M' \setminus \partial(M')$ et $\mathbb{P}^M(\mathbb{R})$, où M' et $\mathbb{P}^M(\mathbb{R})$ sont en particulier des variétés PL (piecewise-linear) compactes, le lemme V.1.4 de [31] nous dit que f' est homotope à la restriction à N' d'une application PL, et donc en particulier continue semi-algébrique, $\overline{f'} : M' \to \mathbb{P}^M(\mathbb{R})$. On va par la suite chercher à approcher la fonction $\overline{f'}$ grâce à un voisinage tubulaire Nash.

(v) Approximations Plongeons donc M' dans un espace affine $\mathbb{R}^{N_0}$ et $\mathbb{P}^M(\mathbb{R})$ dans un espace affine $\mathbb{R}^{M_0}$. On considère un voisinage tubulaire Nash $(U, \rho : U \to \mathbb{P}^M(\mathbb{R}))$ de $\mathbb{P}^M(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^{M_0}$.

M' étant compact, on approche alors $h_0 := \overline{f'}$ par une application polynomiale h_1 en utilisant le théorème de Stone-Weirstrass. Puis on approche l'application h_1 par une application lisse h_2 transverse à $\mathbb{P}^{M-1}(\mathbb{R})$. Enfin, cette dernière condition étant ouverte, on approche h_2 par une application polynomiale (en utilisant encore une fois Stone-Weierstrass) de façon suffisamment proche pour obtenir une application h_3 qui soit polynomiale et transverse à $\mathbb{P}^{M-1}(\mathbb{R})$. Précisons que l'on effectue ces approximations de manière à ce qu'à chaque fois, pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $x \in M/G$, $(1-t)h_i(x) + th_{i+1}(x) \in U$.

Considérant alors les homotopies successives

$$(t, x) \mapsto \rho((1-t)h_i(x) + th_{i+1}(x)),$$

on obtient ainsi une homotopie entre $\overline{f'} : M/G \to \mathbb{P}^M(\mathbb{R})$ et $\overline{h'} := \rho \circ h_3 : M/G \to \mathbb{P}^M(\mathbb{R})$. L'application $\overline{h'}$ est Nash et transverse à $\mathbb{P}^{M-1}(\mathbb{R})$, car ρ est une submersion Nash (en tant que composition d'un difféomorphisme Nash et de la projection d'un fibré vectoriel Nash).

(vi) Restriction Enfin, en restreignant l'homotopie à N' et en notant h' la restriction de $\overline{h'}$ à N', on obtient une application

$$h' : N' \to \mathbb{P}^M(\mathbb{R})$$

Nash, transverse à $\mathbb{P}^{M-1}(\mathbb{R})$, homotope à f'. En la composant enfin avec ψ pour revenir au quotient N/G, on peut supposer que l'application

$$h := h' \circ \psi : N/G \to \mathbb{P}^M(\mathbb{R})$$

Nash, transverse à $\mathbb{P}^{M-1}(\mathbb{R})$ et homotope à $f = f' \circ \psi$, est l'application classifiante associée au $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-fibré principal lisse $\Pi : N \to N/G$.

(vii) Relèvement On relève alors h en une application

$$\widetilde{h} : N \to \mathbb{S}^M(\mathbb{R})$$

équivariante (par rapport à l'action de G sur N et l'action antipodale sur $\mathbb{S}^M(\mathbb{R})$) transverse à $\mathbb{S}^{M-1}(\mathbb{R})$, analytique et localement semi-algébrique, donc Nash, car une application analytique localement semi-algébrique entre deux variétés Nash, dont celle d'arrivée est affine, est Nash (remarque (xv) à la page 16 de [31]).

(viii) Découpage de N On note
- $N^+ := \widetilde{h}^{-1}(S^+)$,
- $N^- := \widetilde{h}^{-1}(S^-) = \sigma(N^+)$,
- $W := \widetilde{h}^{-1}\left(\mathbb{S}^{M-1}(\mathbb{R})\right) = N^+ \cap N^-$.

(S^+ et S^- sont respectivement les hémisphères nord et sud de la sphère $\mathbb{S}^M(\mathbb{R})$, échangés sous l'action antipodale).

N^+ et N^- sont des sous-ensembles semi-algébriques fermés de N de même dimension que N, et, par transversalité de l'application Nash $\widetilde{h}$ (et parce que $\mathbb{S}^{M-1}(\mathbb{R})$ est une sous-variété Nash de $\mathbb{S}^M(\mathbb{R})$), W est une sous-variété Nash de N de codimension 1. C'est de plus un sous-ensemble $\mathcal{AS}$ de N, en tant qu'image réciproque du symétrique par arcs $\mathbb{S}^{M-1}(\mathbb{R})$ par l'application analytique semi-algébrique $\widetilde{h}$.

On a bien évidemment $N^+ \cup N^- = N$ mais on a également $\partial N^+ = \partial N^- = W$.

En effet, le bord semi-algébrique d'un ensemble semi-algébrique A est tout d'abord défini par

$$\partial A = \{x \in A \mid \chi(A \cap S(x,\epsilon)) \equiv 1 \bmod 2\ \}$$

pour ϵ suffisamment petit, or, la caractéristique d'Euler à supports compacts étant additive et N et W ne possédant pas de bord, on a modulo 2, pour tout x dans N,

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \chi\left(N \cap S\left(x,\epsilon\right)\right) \\ &\equiv \chi\left(N^+ \cap S\left(x,\epsilon\right)\right) + \chi\left(N^- \cap S\left(x,\epsilon\right)\right) - \chi\left(W \cap S\left(x,\epsilon\right)\right) \\ &\equiv \chi\left(N^+ \cap S\left(x,\epsilon\right)\right) + \chi\left(N^- \cap S\left(x,\epsilon\right)\right) \end{aligned}$$

Un élément x de N est ainsi dans le bord de N^+ si et seulement s'il est dans le bord de N^-. En particulier, $\partial N^+ = \partial N^- \subset N^+ \cap N^- = W$.

Réciproquement, soit $x \in W$ et supposons par l'absurde que $x \notin \partial N^+ = \partial N^-$. Le point x appartient alors à $N^+ \setminus \partial N^+$ et $N^- \setminus \partial N^-$, qui sont des ouverts semi-algébriques de N : il existe donc des ouverts semi-algébriques U et V de N (de même dimension n que N) tels que $x \in U \subset N^+ \setminus \partial N^+$, et $x \in V \subset N^- \setminus \partial N^-$. L'ouvert $U \cap V$ de N, de dimension n (non vide car contenant x), est alors inclus dans $(N^+ \setminus \partial N^+) \cap (N^- \setminus \partial N^-)$ qui est de dimension au plus $n-1$, en tant que sous-ensemble de W.

(ix) Découpage de M Enfin, on rajoute les points fixes en considérant l'adhérence de N dans M, qui est M tout entier car M est une variété Nash connexe dont la sous-variété Nash M^G est de codimension au moins 1. On note alors

– $M^+ := cl(N^+)$,
– $M^- := cl(N^-) = \sigma(M^+)$.

On voit immédiatement que $M^+ \cup M^- = M$. Montrons que l'on a $M^+ \cap M^- = W \cup M^G$. On prouve pour cela que $cl(N^+) \setminus N^+ = cl(N^-) \setminus N^- = W \cup M^G$.

En effet, comme $cl(N^+) \setminus N^+ \subset M^G$,

$$cl(N^+) \setminus N^+ = \sigma\left(cl(N^+) \setminus N^+\right) = cl(N^-) \setminus N^-.$$

De plus,

$$M = M^+ \cup M^- = (N^+ \cup N^-) \sqcup \big(\left(cl(N^+) \setminus N^+\right) \cup \left(cl(N^-) \setminus N^-\right)\big) = (M \setminus M^G) \sqcup \left(cl(N^+) \setminus N^+\right)$$

donc $cl(N^+) \setminus N^+ = M^G$. En particulier, $M^+ \cap M^- = W \cup M^G$. Remarquons que, comme W est un sous-ensemble $\mathcal{AS}$ de $M \setminus M^G$, $W \cup M^G$ est un sous-ensemble $\mathcal{AS}$ de M. Il est de plus fermé dans le compact M et est donc symétrique par arcs.

Enfin, on montre que $\partial M^+ = \partial M^- = W \cup M^G$, d'une manière identique à ce que l'on avait fait dans le cas de N.

□

Dans la section suivante 3.4, on va, comme annoncé, utiliser ce résultat pour pouvoir découper toute chaîne invariante d'une variété algébrique réelle en deux morceaux suffisamment réguliers.

3.4 La suite exacte de Smith Nash-constructible dans le cas $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Soit X une variété algébrique réelle munie d'une involution algébrique σ. Dans cette partie, on montre que l'on peut écrire toute chaîne c globalement invariante de X de dimension k et de degré α dans la filtration Nash-constructible (avec action) comme la somme

$$c = c|_{X^G} + (1+\sigma)\gamma$$

où $c|_{X^G} \in \mathcal{N}_\alpha C_k(X^G)$ est la restriction de c aux points invariants de X et où $\gamma \in \mathcal{N}_{\alpha+1} C_k(X)$.

Considérant une chaîne c, notre démarche va consister à découper en de tels morceaux l'adhérence de Zariski du support de c, puis de considérer les intersections du support de c avec ceux-ci, qui répondront alors aux conditions recherchées.

On procède ainsi en deux étapes. On traite tout d'abord le cas d'une chaîne pure, et ensuite celui d'une chaîne quelconque.

Pour la première étape, on se ramènera au cas où le support de la chaîne est une variété Nash compacte et on utilisera le résultat 3.3.1 de la section précédente, afin de découper une chaîne pure de X, invariante sous l'action de G, en deux chaînes dont le bord est pur :

Corollaire 3.4.1. *Soit* $c \in (\mathcal{N}_{-k}C_k(X))^G$ *une chaîne pure de dimension* k*, invariante sous l'action de* G*. Alors, il existe une chaîne* $\gamma \in \mathcal{N}_{-k+1}C_k(X)$ *telle que*

$$c = c|_{X^G} + (1+\sigma)\gamma$$

(la restriction $c|_{X^G}$ *à* X^G *appartient à* $\mathcal{N}_{-k}C_k(X^G)$*).*

Démonstration. Notons tout d'abord que, c étant une chaîne invariante sous l'action de G, le support de c est également globalement invariant. En effet, si A est un sous-ensemble semi-algébrique de X représentant la chaîne c, c'est également le cas pour $\sigma(A)$ et, comme l'involution σ est un isomorphisme algébrique, on a

$$\mathrm{Supp}\ c = \{y \in \sigma(A) \mid \dim_y\ \sigma(A) = k\} = \sigma\left(\{x \in A \mid \dim_x A = k\}\right) = \sigma(\mathrm{Supp}\ c).$$

On va alors se ramener au cas où le support de c, que l'on note M, est une sous-variété Nash compacte connexe d'un espace affine.

(1) On peut supposer que la G-variété algébrique réelle X est compacte : si ce n'est pas le cas, on considère une compactification équivariante X_0 de X, et l'adhérence $\overline{c} \in (\mathcal{N}_{-k}C_k(X_0))^G$ de c dans X_0. Si l'on montre alors que, dans ces conditions, il existe $\gamma_0 \in \mathcal{N}_{-k+1}C_k(X_0)$ tel que $\overline{c} = \overline{c}|_{X_0^G} + (1+\sigma)\gamma_0$, on obtient par restriction

$$c = \overline{c}|_X = c|_{X^G} + (1+\sigma)\gamma_0|_X$$

avec $\gamma_0|_X \in \mathcal{N}_{-k+1}C_k(X)$.

(2) On suppose ensuite que X est l'adhérence de Zariski $\overline{M}^{\mathcal{Z}}$ de M et qu'en particulier $\dim X = k$. En effet, si l'on note $Z := \overline{M}^{\mathcal{Z}}$, alors Z est un fermé de X globalement invariant sous l'action de G (car M l'est) et, comme par définition $\mathrm{Supp}\ c \subset Z$, on a $c \in \mathcal{N}_{-k}C_k(Z)$.

(3) On peut aussi supposer que X est non-singulière, en considérant une résolution équivariante $\pi : \widetilde{X} \to X$ des singularités de X et le tiré en arrière $\widetilde{c} := \pi^{-1}c \in \left(\mathcal{N}_{-k}C_k(\widetilde{X})\right)^G$ de c. Alors, si l'on montre que dans ces conditions, $\widetilde{c} = \widetilde{c}|_{\widetilde{X}^G} + (1+\sigma)\widetilde{\gamma}$ avec $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{N}_{-k}C_k(\widetilde{X})$, on obtient, en poussant en avant,

$$c = \pi_*(c) = c|_{X^G} + (1+\sigma)\pi_*(\widetilde{\gamma})$$

(avec $\pi_*(\widetilde{\gamma}) \in \mathcal{N}_{-k}C_k(X)$), car π est un isomorphisme en dehors d'une sous-variété de codimension au moins 1 et c est de dimension $k = \dim X$).

Au total, la chaîne c étant pure, on peut supposer que le support M de c est un sous-ensemble symétrique par arcs (dont toutes les composantes connexes sont) de dimension maximale d'une variété compacte non-singulière X, i.e. une union de composantes connexes de dimension maximale de X ([19]).

(4) Enfin, l'involution σ échange ou fixe globalement les cartes affines recouvrant X ainsi que les composantes connexes de X, et donc les restrictions de M à celles-ci, qui constituent

également des chaînes pures de X. On peut donc supposer sans perdre de généralité que M est une composante connexe d'un sous-ensemble algébrique compact non-singulier d'un espace affine, globalement stable sous l'action (non triviale) de σ, qui peut être considérée comme une sous-variété Nash compacte connexe d'un espace affine.

On utilise alors le théorème 3.3.1 pour écrire

$$[M] = (1+\sigma)[A]$$

dans $C_k(X)$ (l'ensemble des points invariants M^G est de codimension au moins 1 comme l'action de G n'est pas triviale, donc $[M^G] = 0$ dans $C_k(X)$), avec $[A] \in C_k(X)$ vérifiant $\partial[A] = [\partial(A)] \in \mathcal{N}_{-k+1}C_{k-1}(X)$, i.e. $[A] \in \mathcal{N}_{-k+1}C_k(X)$ (remarque 2.6.13 : X est compacte non-singulière de dimension k).

□

On va alors utiliser le découpage des chaînes pures pour découper les chaînes de degré plus élevé dans la filtration. Précisément, pour couper en deux une chaîne invariante sous l'action de G, de façon à contrôler la "régularité" des parties que l'on obtient, il suffit de découper l'adhérence de Zariski de son support, en utilisant la propriété précédente :

Corollaire 3.4.2. *Soit $c \in (\mathcal{N}_\alpha C_k(X))^G$ une k-chaîne quelconque de X, invariante sous l'action de l'involution σ. Alors on peut écrire*

$$c = c|_{X^G} + (1+\sigma)c'$$

avec $c|_{X^G} \in \mathcal{N}_\alpha C_k(X^G)$ et $c' \in \mathcal{N}_{\alpha+1}C_k(X)$

Démonstration. On note $c^{\mathcal{Z}}$ la chaîne de $C_k(X)$ représentée par l'adhérence de Zariski du support noté A de la chaîne c. On a alors $c^{\mathcal{Z}} \in (\mathcal{N}_{-k}C_k(X))^G$ et d'après la propriété précédente, il existe $\gamma \in \mathcal{N}_{-k+1}C_k(X)$ tel que

$$c^{\mathcal{Z}} = \left(c^{\mathcal{Z}}\right)|_{X^G} + (1+\sigma)\gamma.$$

Revenons à la définition de la filtration Nash-constructible : soit donc une fonction $\varphi : X \to 2\mathbb{Z}$ génériquement Nash-constructible en dimension k telle que $\gamma = [S]$ avec

$$S = \{x \in X \mid \varphi(x) \notin 2^2\mathbb{Z}\},$$

et soit une fonction $\psi : X \to 2^{k+\alpha}\mathbb{Z}$ génériquement Nash-constructible en dimension k telle que $c = [B]$ avec

$$B = \{x \in X \mid \psi(x) \notin 2^{k+\alpha+1}\mathbb{Z}\}.$$

On considère alors le produit $\varphi \times \psi : X \to 2^{k+\alpha+1}\mathbb{Z}$ qui est une fonction génériquement Nash-constructible en dimension k (comme produit de telles fonctions). On a

$$\begin{aligned} B \cap S &= \{x \in X \mid \varphi(x) \notin 2^{k+\alpha+1}\mathbb{Z} \text{ et } \psi(x) \notin 2^2\mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in X \mid \varphi \times \psi(x) \notin 2^{k+\alpha+2}\mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

On note c' la chaîne représentée par $B \cap S$, qui appartient donc à $\mathcal{N}_{\alpha+1}C_k(X)$, et on a

$$\begin{aligned}(1+\sigma)c' &= [B \cap S] + [\sigma(B) \cap \sigma(S)] \\ &= [B \cap S] + [B \cap \sigma(S)] \text{ (lemme 1.2.5)} \\ &= [cl\,(B \cap (S \div \sigma(S)))] \\ &= [B \cap cl\,(S \div \sigma(S))] \text{ (lemme 1.2.6)},\end{aligned}$$

or

$$[cl\,(S \div \sigma(S))] = (1+\sigma)[S] = c^{\mathcal{Z}} + \left(c^{\mathcal{Z}}\right)|_{X^G} = \left[cl\left(\overline{A}^{\mathcal{Z}} \setminus \overline{A}^{\mathcal{Z}} \cap X^G\right)\right],$$

donc

$$\begin{aligned}(1+\sigma)c' &= \left[A \cap cl\left(\overline{A}^{\mathcal{Z}} \setminus \overline{A}^{\mathcal{Z}} \cap X^G\right)\right] \\ &= \left[cl\left(A \cap \left(\overline{A}^{\mathcal{Z}} \setminus \overline{A}^{\mathcal{Z}} \cap X^G\right)\right)\right] \\ &= \left[cl\left(A \setminus A \cap X^G\right)\right] \\ &= c + c|_{X^G}.\end{aligned}$$

□

On résume cette propriété de découpage des chaînes invariantes par une suite exacte courte qui rappelle la suite exacte courte de Smith, que l'on adapte ici aux contraintes de la filtration Nash-constructible. On définit pour cela une nouvelle filtration avant de donner la suite exacte courte que l'on nommera Smith Nash-constructible :

Définition 3.4.3. *Pour tout k et tout α, on note*

$$T_k^{\alpha+1}(X) := \{c \in \mathcal{N}_{\alpha+1}C_k(X) \mid (1+\sigma)c \in \mathcal{N}_\alpha C_k(X)\}.$$

Remarque 3.4.4. Pour tout α, $T_*^{\alpha+1}(X)$, muni de la différentielle induite par celle de $C_*(X)$, est un complexe de chaînes. On obtient ainsi une nouvelle filtration

$$0 = T_k^{-k-1}(X) \subset T_k^{-k}(X) \subset \cdots \subset T_k^1(X) = C_k(X)$$

de $C_*(X)$.

Théorème 3.4.5. *Pour tout α, la suite de complexes*

$$0 \to \mathcal{N}_\alpha C_*(X^G) \oplus (1+\sigma)T_*^{\alpha+1}(X) \to \mathcal{N}_\alpha C_*(X) \to (1+\sigma)\mathcal{N}_\alpha C_*(X) \to 0,$$

est exacte.

On l'appelle suite exacte courte de Smith Nash-constructible de degré α.

On peut interpréter cette suite exacte dans le cas où X est une variété compacte munie d'une action libre de G. En effet, dans ces conditions, on a un isomorphisme filtré entre les chaînes invariantes et les chaînes du quotient :

Proposition 3.4.6. *Supposons que la G-variété algébrique réelle X soit compacte, et que l'action de G sur X soit libre. Alors le quotient X/G (qui désigne par abus de notation le quotient de l'ensemble des points réels de X par l'action de G restreinte) est un ensemble symétrique par arcs et, pour tous $k, \alpha \in \mathbb{Z}$, on a un isomorphisme*

$$(\mathcal{N}_\alpha C_k(X))^G \cong (1+\sigma)T_k^{\alpha+1}(X) \cong \mathcal{N}_\alpha C_k\,(X/G)\,.$$

Démonstration. Fixons k et α. Notons tout d'abord que la suite exacte de Smith Nash-constructible nous donne le premier isomorphisme, étant donné que l'action de G sur X est libre.

Pour montrer le second isomorphisme, on considère d'une part le morphisme

$$1+\sigma : T_k^{\alpha+1}(X) \to T_k^{\alpha+1}(X)$$

dont le noyau est $\left(T_k^{\alpha+1}(X)\right)^G$ et l'image est $(1+\sigma)T_k^{\alpha+1}(X)$, et d'autre part le morphisme

$$T_k^{\alpha+1}(X) \xrightarrow{\pi_*} \mathcal{N}_{\alpha+1}C_k\,(X/G)\,,$$

obtenu par restriction à $T_k^{\alpha+1}(X)$ du morphisme $\mathcal{N}_{\alpha+1}C_k(X) \to \mathcal{N}_{\alpha+1}C_k(X/G)$, induit par l'application quotient $X \to X/G$ (qui est une application propre continue de graphe $\mathcal{AS}$).

On montre par la suite que le noyau de π_* est $\left(T_k^{\alpha+1}(X)\right)^G$ et que son image est $\mathcal{N}_\alpha C_k\,(X/G)$. Ainsi, les morphismes $1+\sigma$ et π_* possédant les mêmes noyaux (et les mêmes espaces de départ), on obtient un isomorphisme entre leurs images, soit

$$(1+\sigma)T_k^{\alpha+1}(X) \cong \mathcal{N}_\alpha C_k\,(X/G)\,.$$

<u>$ker\ \pi_* = \left(T_k^{\alpha+1}(X)\right)^G$:</u>

Soit $c \in T_{\alpha+1}$ tel que $\pi_* c = 0$. Si $c = \mathrm{Supp}\ \varphi_{c,\alpha} \bmod 2^{k+\alpha+2}$ avec $\varphi : X \to 2^{k+\alpha+1}\mathbb{Z}$ génériquement Nash-constructible en dimension k, alors

$$\pi_* c = \mathrm{Supp}\ \pi_*(\varphi_{c,\alpha}) \bmod 2^{k+\alpha+2}$$

où $\pi_*(\varphi_{c,\alpha}) : X/G \to 2^{k+\alpha+1}\mathbb{Z}$ est une fonction génériquement Nash-constructible en dimension k sur X/G.

Or, pour toute fonction Nash-constructible f sur X, comme l'action de σ sur X est libre, $\pi_*(f)(\overline{x}) = f(x) + f(\sigma(x))$ pour tout point $\overline{x} \in X/G$. Ainsi,

$$\pi_* c = \{\overline{x} \in X/G \mid \varphi(x) + \varphi(\sigma(x)) \notin 2^{k+\alpha+2}\mathbb{Z}\},$$

avec $\varphi := \varphi_{c,\alpha}$.

Par hypothèse cette chaîne est nulle, i.e. pour tout $\overline{x}$ en dehors d'un sous-ensemble semi-algébrique de X/G de dimension $< k$ (i.e. pour tout x en dehors d'un sous-ensemble semi-algébrique de X de dimension $< k$), $\varphi(x) + \varphi(\sigma(x)) \in 2^{k+\alpha+2}\mathbb{Z}$. En particulier, en dehors d'un sous-ensemble semi-algébrique de codimension au moins 1, tout point du représentant

$\{x \in X \mid \varphi(x) \notin 2^{k+\alpha+2}\mathbb{Z}\}$ de la chaîne c vérifie à la fois $\varphi(x) \notin 2^{k+\alpha+2}\mathbb{Z}$ (par définition) et $\varphi(x)+\varphi(s(x)) \in 2^{k+\alpha+2}\mathbb{Z}$, et donc également $\varphi(\sigma(x)) \notin 2^{k+\alpha+2}\mathbb{Z}$. Or $\varphi \circ \sigma = \sigma^* (\varphi)$ représente la chaîne σc, et la chaîne σ est donc invariante sous l'action de σ.

On a donc $ker\ \pi_* \subset (T_k^{\alpha+1}(X))^G$. Réciproquement, si $c \in (T_k^{\alpha+1}(X))^G$, alors, en reprenant les notations ci-dessus, $\varphi(x) \notin 2^{k+\alpha+2}\mathbb{Z}$ et $\varphi(\sigma(x)) \notin 2^{k+\alpha+2}\mathbb{Z}$ pour tout x dans le support de c, génériquement en dimension k, et donc $\varphi(x) + \varphi(s(x)) \in 2^{k+\alpha+2}\mathbb{Z}$. Ainsi, $\pi_* c = 0$.

$\underline{im\ \pi_* = \mathcal{N}_\alpha C_k\,(X/G)}$

Soit $c \in \mathcal{N}_\alpha C_k(X/G)$ et soit $\varphi : X/G \to 2^{k+\alpha}\mathbb{Z}$ génériquement Nash-constructible en dimension k telle que

$$c = \{\overline{x} \in X/G \mid \varphi(\overline{x}) \notin 2^{k+\alpha+1}\mathbb{Z}\}.$$

On considère la chaîne, que l'on note $\pi^* c$, représentée par l'ensemble semi-algébrique de dimension k

$$\{x \in X \mid \pi^*(\varphi)(x) \notin 2^{k+\alpha+1}\mathbb{Z}\} = \pi^{-1}\Big(\{\overline{x} \in X/G \mid \varphi(\overline{x}) \notin 2^{k+\alpha+1}\mathbb{Z}\}\Big)$$

où le tiré en arrière $\pi^*(\varphi) : X \to 2^{k+\alpha}\mathbb{Z}$ ([26] Corollary 3.5) est une fonction génériquement Nash-constructible en dimension k telle que, pour $x \in X$ en dehors d'un sous-ensemble semi-algébrique de dimension $< k$, $\pi^*(\varphi)(x) = \varphi(\pi(x)) = \varphi(\overline{x})$.

La chaîne $\pi^* c$ appartient donc à $\mathcal{N}_\alpha C_k(X)$ et est de plus invariante sous l'action de G. En suivant le raisonnement qui nous a menés à l'exactitude de la suite de Smith Nash-constructible, on sait que l'on peut écrire $\pi^* c = (1+\sigma)\gamma$ avec

$$\gamma = \{x \in X \mid \psi(x) \notin 2^2\mathbb{Z} \text{ et } \pi^*(\varphi)(x) \notin 2^{k+\alpha+1}\mathbb{Z}\}$$

où $\psi : X \to 2\mathbb{Z}$ est une fonction génériquement Nash-constructible en dimension k, dont le support modulo 2^2 représente l'une des deux parties, images l'une de l'autre par σ, que l'on a obtenues par découpage de la chaîne représentée par l'adhérence de Zariski du support de $\pi^* c$.

On applique alors π_* à γ :

$$\begin{aligned} \pi_*\gamma &= \{\overline{x} \in X/G \mid \pi_*\left(\psi \times \pi^*(\varphi)\right)(\overline{x}) \notin 2^{k+\alpha+2}\mathbb{Z}\} \\ &= \{\overline{x} \in X/G \mid \varphi(\overline{x})\left(\psi(x) + \psi(\sigma(x))\right) \notin 2^{k+\alpha+2}\mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Si $\overline{x} \in X/G$ vérifie $\varphi(\overline{x})\left(\psi(x) + \psi(\sigma(x))\right) \notin 2^{k+\alpha+2}\mathbb{Z}$, alors $\varphi(\overline{x}) \notin 2^{k+\alpha+1}$. Réciproquement, si $\overline{x} \in X/G$ vérifie $\varphi(\overline{x}) \notin 2^{k+\alpha+1}$, alors x appartient au support de $\pi^* c$ (vrai au moins génériquement en dimension k) et donc soit au support de γ soit au support de $\sigma\gamma$, mais (génériquement) pas aux deux, et ainsi $\psi(x)+\psi(\sigma(x)) \notin 2^2\mathbb{Z}$ et donc $\varphi(\overline{x})\left(\psi(x) + \psi(\sigma(x))\right) \notin 2^{k+\alpha+2}\mathbb{Z}$.

On obtient alors

$$\pi_*\gamma = \{\overline{x} \in X/G \mid \varphi(\overline{x}) \notin 2^{k+\alpha+1}\} = c$$

et c appartient donc à l'image de $T_k^{\alpha+1}(X)$ par π_*.

Réciproquement, soit $c \in T_k^{\alpha+1}(X)$. On a $c = \text{Supp}\ \psi \bmod 2^{k+\alpha+2}$ avec $\psi : X \to 2^{k+\alpha+1}\mathbb{Z}$ génériquement Nash-constructible en dimension k, et $(1+\sigma)c = \text{Supp}\ \varphi \bmod 2^{k+\alpha+1}$ avec φ

génériquement Nash-constructible en dimension k. Alors, comme $(1+\sigma)c = \operatorname{Supp} \frac{\psi+\psi\circ\sigma}{2} \bmod 2^{k+\alpha+1}$, on a

$$\varphi \equiv \frac{\psi + \psi\circ\sigma}{2} \bmod 2^{k+\alpha+1}$$

sur X.

On considère maintenant

$$\pi_* c = \{\overline{x} \in X/G \mid \pi_*(\psi)(\overline{x}) \notin 2^{k+\alpha+2}\} = \{\overline{x} \in X/G \mid \psi(x) + \psi(\sigma(x)) \notin 2^{k+\alpha+2}\}.$$

On montre que l'on peut trouver une fonction génériquement Nash-constructible sur X/G, divisible par $2^{k+\alpha}$, qui représente $\pi_* c$. Pour cela, on applique le critère de l'éventail 2.6.14 à chacune des composantes irréductibles de chaque carte affine de l'adhérence de Zariski Y de X/G et à la fonction

$$f : y \mapsto \begin{cases} \frac{\psi(x)+\psi(\sigma(x))}{2} & \text{si } y = \overline{x} \in X/G, \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

définie et constructible sur Y.

Soit donc F un éventail centré en un point y_0 de Y, de cardinal $|F| \leq 2^{k+\alpha+1}$. Comme X est compact et l'action de G sur X étant libre, si le point $y_0 = \overline{x_0}$ est dans X/G, on peut relever F en un éventail double $F' \sqcup \sigma(F')$ sur X (F' étant centré en x_0 et $\sigma(F')$ en $\sigma(x_0)$), et sinon l'évaluation de f en tout point de l'éventail sera nulle. Concentrons-nous donc sur le premier cas. On a alors

$$\sum_{s\in F} f(s) = \sum_{s'\in F'} \frac{\psi(s') + \psi(\sigma(s'))}{2},$$

et cette somme, modulo $|F| = |F'| \leq 2^{k+\alpha+1}$, est égale à $\sum_{\sigma'\in F'} \varphi(\sigma')$ qui est elle-même égale à 0 modulo $|F'| \leq 2^{k+\alpha+1}$, car φ est génériquement Nash-constructible sur X (2.6.15).

Ainsi (2.6.14), il existe une fonction $f_0 : Y \to \mathbb{Z}$, génériquement Nash-constructible, telle que, pour tout $y \in Y$, $f(y) - f_0(y) \equiv 0 \bmod 2^{k+\alpha+1}$. En particulier, f_0 est divisible par $2^{k+\alpha}$ et

$$\pi_* c = \operatorname{Supp} f_0 \bmod 2^{k+\alpha+1}.$$

On peut de plus supposer f_0 génériquement constructible en dimension k, en remplaçant, dans le raisonnement précédent, X par l'adhérence de Zariski du support de c. On a donc $\pi_* c \in \mathcal{N}_\alpha C_k(X/G)$.

□

Remarque 3.4.7.

– Les isomorphismes $(\mathcal{N}_\alpha C_k(X))^G \cong \mathcal{N}_\alpha C_k(X/G)$ induisent des isomorphismes de complexes

$$(\mathcal{N}_\alpha C_*(X))^G \cong \mathcal{N}_\alpha C_*(X/G),$$

induits par l'application quotient $\pi : X \to X/G$ par fonctorialité de $\mathcal{N}_\alpha C_*$.

– Pour une G-variété algébrique réelle X quelconque munie d'une action de G quelconque, en raisonnant de façon similaire, on obtient également les isomorphismes (de complexes)

$$(1+\sigma)\mathcal{N}_\alpha C_*(X) \cong im\ \left(\mathcal{N}_\alpha C_*(X) \to C_*(X \setminus X^G/G)\right).$$

Ces suites exactes courtes de Smith Nash-constructibles nous aideront dans le point suivant à calculer et à mieux comprendre une suite spectrale dont la caractéristique d'Euler est un invariant des G-variétés algébriques réelles.

Remarquons enfin que l'on peut en déduire des suites exactes courtes similaires, construites cette fois en tenant compte de la filtration canonique :

Définition 3.4.8. *Pour tout k et tout p, on note*

$$^{can}T_k^{p+1}(X) := \{c \in F_{p+1}^{can} C_k(X) \mid (1+\sigma)c \in F_p^{can} C_k(X)\}.$$

Corollaire 3.4.9. *Pour tout p, la suite de complexes*

$$0 \to F_p^{can} C_* \left(X^G\right) \oplus (1+\sigma)^{can}T_*^{p+1}(X) \to F_p^{can} C_*(X) \to (1+\sigma) F_p^{can} C_*(X) \to 0$$

est exacte.

Démonstration. Fixons $k,\ p \in \mathbb{Z}$. Soit $c \in \left(F_p^{can} C_k(X)\right)^G$.

Comme $F_p^{can} C_k(X) \subset C_k(X) = \mathcal{N}_0 C_k(X)$, il existe $c' \in C_k(X)$ tel que $c = c_{|X^G} + (1+\sigma)c'$. Or, $c' \in F_{p+1}^{can} C_k(X)$ car

- si $k < -p$, $F_p^{can} C_k(X) = 0$ donc $c = 0$ et $c' = 0$ convient,
- si $k = -p$, $F_p^{can} C_k(X) = ker\ \partial_k$ et $F_{p+1}^{can} C_k(X) = C_k(X)$,
- si $k > -p$, $F_{p+1}^{can} C_k(X) = C_k(X)$.

□

Chapitre 4

Filtration par le poids équivariante pour les G-variétés algébriques réelles

Soit G un groupe fini.

Dans cette partie, on va chercher à construire une filtration par le poids sur l'homologie équivariante des G-variétés algébriques réelles définie par J. van Hamel dans [35], à partir du complexe de poids avec action (3.2.3). Pour cela, on lui applique le foncteur qui, appliqué au complexe des chaînes semi-algébriques, calcule cette fameuse homologie équivariante (4.1.10, 4.3.1).

Une fois que l'on aura obtenu ce complexe de poids que l'on appellera équivariant (4.3.6), des différences significatives avec le complexe de poids non-équivariant, induites par les spécificités de l'homologie équivariante, apparaîtront. En particulier, la suite spectrale de poids équivariante peut ne pas être bornée (4.4.12) et ne plus converger au niveau E^2, même dans le cas compact non singulier (4.4.13,4.3.3).

Pourtant, les outils propres à l'homologie équivariante -et qui permettent de mieux comprendre cet invariant- nous permettront d'étudier plus en profondeur ce surplus d'informations, notamment par le biais de nouvelles suites spectrales (4.4.6), triviales dans le cadre sans action.

4.1 Le foncteur L

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser aux outils mis à notre disposition pour mieux appréhender l'action des groupes sur des structures tout d'abord générales, des modules aux complexes de chaînes.

4.1.1 Le foncteur Ext et la cohomologie du groupe G à valeurs dans un $\mathbb{Z}[G]$-module

On définit tout d'abord un double foncteur duquel la cohomologie de G à coefficients dans un module est un cas particulier. Cela nous permettra notamment de déduire la plupart des propriétés fonctorielles de celle-ci du foncteur plus général.

Pour cela, nous avons besoin de la définition d'une résolution projective, et donc également de celle d'un module projectif :

Définition 4.1.1. *Soit R un anneau et notons $Mod(R)$ la catégorie des R-modules.*

Un R-module P est dit projectif (sur R) si le foncteur $Hom_R(P,\cdot)$ est exact.

Soit $M \in Mod(R)$. Une résolution projective de M dans $Mod(R)$ est un couple formé d'un complexe de chaînes $P_* = (P_k)_{k\geq 0}$ et d'un morphisme $\epsilon : P_0 \to M$ tels que la suite

$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$$

est exacte.

Définition et Proposition 4.1.2. ([7]) *Soit R un anneau. Soient $N, M \in Mod(R)$. Soit (P_*, ϵ) une résolution projective de N dans $Mod(R)$. Alors pour $n \in \mathbb{N}$, on pose*

$$Ext^n_R(N,M) := H^n(Hom_R(P_*, M)).$$

L'opération Ext est un foncteur en M.

Cette définition est indépendante de la résolution projective choisie, en vertu de :

Proposition 4.1.3. ([6]) *Soient (P_*, ϵ) et (Q_*, ϵ') deux résolutions projectives d'un même R-module sur un anneau R. Alors il existe une équivalence homotopique $f_* : P_* \to Q_*$ qui vérifie $\epsilon' \circ f_0 = \epsilon$.*

La cohomologie du groupe G à valeurs dans un module est alors un foncteur Ext sur l'anneau $\mathbb{Z}[G]$:

Définition et Proposition 4.1.4. ([6], [7]) *Soit M un $\mathbb{Z}[G]$-module. On définit le k-ième groupe de cohomologie du groupe G à valeurs dans M par*

$$H^k(G,M) := Ext_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M).$$

La cohomologie du groupe G est un foncteur en M.

Remarque 4.1.5. Pour $k < 0$, $H^k(G,M) = 0$.

Exemple 4.1.6. ([6]) Soit G un groupe fini cyclique d'ordre d. Soit σ un générateur de G, alors, si l'on note $N = \sum_{1\leq i\leq d} \sigma^i$, une résolution projective de $\mathbb{Z}$ par des $\mathbb{Z}[G]$-modules est

$$\cdots \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\sigma-1} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\sigma-1} \mathbb{Z} \to 0.$$

La cohomologie du groupe G à valeurs dans un module M est alors

$$H^k(G,M) = \begin{cases} \frac{M^G}{NM} \text{ si } k \text{ est pair strictement positif,} \\ \frac{ker\ (M \xrightarrow{N} M)}{(\sigma-1)M} \text{ si } k \text{ est impair (positif),} \\ M^G \text{ si } k = 0. \end{cases}$$

Les objets que nous considérons afin d'étudier les G-variétés algébriques ont pour anneau de base $\mathbb{Z}_2$. Pour la suite de ce paragraphe, nous nous concentrerons donc sur les $\mathbb{Z}_2$-espaces vectoriels munis d'une action linéaire du groupe G, autrement dit les $\mathbb{Z}_2[G]$-modules. Nous pourrons alors nous contenter de considérer une résolution de $\mathbb{Z}_2$ par des $\mathbb{Z}_2[G]$-modules projectifs en vertu de la proposition suivante :

Proposition 4.1.7. ([7]) *Soit k un anneau et soit M un $k[G]$-module. Alors pour tout n, on a*

$$H^n(G,M) = Ext^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},M) \cong Ext^n_{k[G]}(k,M)$$

(c'est un isomorphisme de k-modules).

Exemple 4.1.8. Si $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et si M est un $\mathbb{Z}_2[G]$-module, la cohomologie du groupe G à valeurs dans M est

$$H^k(G,M) = \begin{cases} M^G \text{ si } k=0, \\ \frac{M^G}{(1+\sigma)M} \text{ si } k>0. \end{cases}$$

On termine cette introduction par une propriété qui nous dit que le foncteur Ext, et donc en particulier la cohomologie de groupe, peut induire une suite exacte longue à partir d'une suite exacte courte :

Proposition 4.1.9. ([7], [6]) *Soit R un anneau. Soient N un R-module et $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ une suite exacte courte de R-modules. Alors, on a une suite exacte longue*

$$0 \to \cdots \to Ext^n_R(N,M_1) \to Ext^n_R(N,M_2) \to Ext^n_R(N,M_3) \to Ext^{n+1}_R(N,M_1) \to \cdots$$

De plus, la suite est naturelle : si

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M_1 & \to & M_2 & \to & M_3 & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & M_1' & \to & M_2' & \to & M_3' & \to & 0 \end{array}$$

est un diagramme commutatif de suites exactes courtes, alors

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & \to & \cdots & \to & Ext^n_R(N,M_1) & \to & Ext^n_R(N,M_2) & \to & Ext^n_R(N,M_3) & \to & Ext^{n+1}_R(N,M_1) & \to & \cdots \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \cdots & \to & Ext^n_R(N,M_1') & \to & Ext^n_R(N,M_2') & \to & Ext^n_R(N,M_3') & \to & Ext^{n+1}_R(N,M_1') & \to & \cdots \end{array}$$

est un diagramme commutatif de suites exactes longues.

En particulier, si G est un groupe fini et $R = \mathbb{Z}[G]$, on a une suite exacte longue de cohomologie du groupe G

$$0 \to \cdots \to H^n(G,M_1) \to H^n(G,M_2) \to H^n(G,M_3) \to H^{n+1}(G,M_1) \to \cdots$$

qui est de plus naturelle.

4.1.2 Le foncteur L^G et l'homologie du groupe G à valeurs dans un complexe

Dans un second temps, on définit l'homologie du groupe G à coefficients dans un complexe de chaînes sur $\mathbb{Z}_2$. On va pour cela introduire un foncteur L^G sur la catégorie $\mathcal{D}^G$ des G-complexes de $\mathbb{Z}_2$-espaces vectoriels bornés. Si K est un tel complexe, l'homologie du complexe $L^G(K)$ sera alors par définition l'homologie de G à valeurs dans K. Une manière de comprendre cette homologie sera alors d'étudier deux suites spectrales induites par l'action de G sur K et K lui-même (4.1.13).

Avant toute chose, on note $\mathcal{D}_-$ la catégorie des complexes bornés par le haut de $\mathbb{Z}_2$-espaces vectoriels, et $H\circ\mathcal{D}_-$ la catégorie $\mathcal{D}_-$ localisée par rapport aux quasi-isomorphismes.

Définition et Proposition 4.1.10. *Soit $(K_*, \partial_*) \in \mathcal{D}^G$. Soit $\ldots \to F_2 \xrightarrow{\Delta_2} F_1 \xrightarrow{\Delta_1} F_0 \to \mathbb{Z} \to 0$ une résolution de $\mathbb{Z}$ par des $\mathbb{Z}[G]$-modules projectifs.*
On définit pour $k \in \mathbb{Z}$

$$L_k^G(K_*) := \bigoplus_{p+q=k} Hom_G(F_{-p}, K_q),$$

et $\delta_k = \sum_{p+q=k} \delta_{p,q} : L_k^G(K_*) \to L_{k-1}^G(K_*)$ avec

$$\delta_{p,q} : \begin{array}{ccc} Hom_G(F_{-p}, K_q) & \to & Hom_G(F_{-p+1}, K_q) \oplus Hom_G(F_{-p}, K_{q-1}) \\ u & \mapsto & u \circ \Delta_{-p+1} \oplus \partial_q \circ u \end{array}.$$

Le couple $(L_*^G(K_*), \delta_*)$ est alors un élément de $\mathcal{D}_-$. Dans $H\circ\mathcal{D}_-$, $(L_*^G(K_*), \delta_*)$ est indépendant de la résolution de $\mathbb{Z}$ par des $\mathbb{Z}[G]$-modules projectifs choisie.

Remarque 4.1.11. Pour $G = \{e\}$, on obtient $L_*^G(K_*) = K_*$ (en considérant $\ldots \to 0 \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z} \to 0$ comme résolution projective).

Par fonctorialité de $Hom_G(F_{-p}, \ \cdot\ )$ pour tout p, L^G est bien un foncteur $\mathcal{D}^G \to \mathcal{D}_-$, du moins $\mathcal{D}^G \to H\circ\mathcal{D}_-$ pour que cela soit indépendant de la résolution projective choisie. Et par définition :

Définition 4.1.12. *Soit $(K_*, \partial_*) \in \mathcal{D}^G$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note*

$$H_n(G, K_*) := H_n(L_*^G(K_*))$$

le n-ième groupe d'homologie du groupe G à coefficients dans le G-complexe de chaînes K_*.

Comme annoncé, on associe à cette homologie deux suites spectrales essentielles pour sa compréhension :

Proposition et Définition 4.1.13. *Pour tout G-complexe K_*, on a deux suites spectrales*

$${}_IE^2_{p,q} = H^{-p}(G, H_q(K_*))$$

$${}_{II}E^1_{p,q} = H^{-p}(G, K_q)$$

qui convergent toutes deux vers $H_{p+q}(G, K_*)$.

La suite spectrale ${}_IE^2$ est appelée suite spectrale de Hochschild-Serre associée à G et K_*.

Démonstration. Ce sont les suites spectrales induites par le complexe double $(Hom(F_{-p}, C_q))_{p,q}$:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\leftarrow & Hom_G(F_2, K_2) & \xleftarrow{\circ\Delta_2} & Hom_G(F_1, K_2) & \xleftarrow{\circ\Delta_1} & Hom_G(F_0, K_2) \\
 & \downarrow \partial_2\circ & & \downarrow \partial_2\circ & & \downarrow \partial_2\circ \\
\leftarrow & Hom_G(F_2, K_1) & \xleftarrow{\circ\Delta_2} & Hom_G(F_1, K_1) & \xleftarrow{\circ\Delta_1} & Hom_G(F_0, K_1) \\
 & \downarrow \partial_1\circ & & \downarrow \partial_1\circ & & \downarrow \partial_1\circ \\
\leftarrow & Hom_G(F_2, K_0) & \xleftarrow{\circ\Delta_2} & Hom_G(F_1, K_0) & \xleftarrow{\circ\Delta_1} & Hom_G(F_0, K_0)
\end{array}
$$

□

La suite spectrale de Hochschild-Serre nous permet en particulier de montrer que le foncteur L^G préserve les quasi-isomorphismes :

Corollaire 4.1.14. *Un quasi-isomorphisme équivariant $f : K_* \to M_*$ induit un isomorphisme $H_*(G, K_*) \to H_*(G, M_*)$.*

Le foncteur

$$L^G : \mathcal{D}^G \to H \circ \mathcal{D}_- \ ; \ K_* \mapsto L_*(K_*)$$

induit donc un foncteur

$$H \circ \mathcal{D}^G \to H \circ \mathcal{D}_- \ ; \ K_* \mapsto L_*(K_*)$$

que l'on note également L^G.

Démonstration. Le quasi-isomorphisme équivariant $f : K_* \to M_*$ induit un isomorphisme au niveau des suites spectrales de Hochschild-Serre induites à partir du niveau ${}_IE^2$. Celles-ci convergeant vers les homologies de G à coefficients respectivement dans K_* et M_*, f induit donc un isomorphisme $H_*(G, K_*) \to H_*(G, M_*)$. □

Remarque 4.1.15. La suite de Hochschild-Serre nous permet de la même manière de montrer que dans la définition du foncteur L^G, et donc dans le calcul de l'homologie de G, on peut choisir une résolution de $\mathbb{Z}_2$ par des $\mathbb{Z}_2[G]$-modules projectifs, au lieu d'une résolution de $\mathbb{Z}$ par des $\mathbb{Z}[G]$-modules projectifs.

4.1.3 La fonctorialité du foncteur L par rapport à G

On établit la fonctorialité du foncteur L par rapport au groupe G en le sens suivant :

Proposition 4.1.16. *Soient G' un autre groupe fini et $\varphi : G \to G'$ un morphisme de groupes. Soit $K_* \in \mathcal{D}^{G'}$. Alors K_* peut être muni d'une structure de G-complexe via φ, et φ induit un morphisme de $\mathcal{D}_-$*

$$L_*^{G'}(K_*) \to L_*^G(K_*)$$

(en considérant une résolution projective respectivement pour G' et G).

Démonstration. On fait de K_* un G-complexe en considérant l'action qui à un élément g de G et un élément x de K_* associe $g.x := \varphi(g).x$.

Pour vérifier ensuite que φ induit bien un morphisme $L_*^{G'}(K_*) \to L_*^G(K_*)$, on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 4.1.17. ([6]) *Soient des résolutions projectives F et F' de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}[G]$ et $\mathbb{Z}[G']$ respectivement. Alors il existe un morphisme de G-complexes $\tau : F \to F'$ (i.e. F' est munie d'une action de G via φ et $\tau(g.x) = \varphi(g).x$) qui préserve les morphismes d'augmentation.*

Soient donc F, F' et τ comme dans le lemme et soit $k \in \mathbb{Z}$. On a

$$L_k^{G'}(K_*) = \bigoplus_{p+q=k} Hom_{G'}(F'_{-p}, K_q)$$

Or, pour tous p, q tels que $p + q = k$, le morphisme $\tau : F \to F'$ induit un morphisme

$$Hom_{G'}(F'_{-p}, K_q) \to Hom_G(F_{-p}, K_q)$$

par composition (à droite) par τ. Pour tout k, on a donc un morphisme $L_k^{G'}(K_*) \to L_k^G(K_*)$, et ceux-ci, commutant avec les différentielles des complexes $L_*^{G'}(K_*)$ et $L_*^G(K_*)$, induisent à leur tour un morphisme de complexes

$$L_*^{G'}(K_*) \to L_*^G(K_*).$$

□

4.2 Le foncteur L et les catégories filtrées

Dans ce paragraphe, on montre que le foncteur L^G induit un foncteur $\mathcal{C}^G \to \mathcal{C}_-$. Autrement dit, appliquer le foncteur L^G à un G-complexe filtré fournit un complexe filtré (borné par le haut).

L'objectif étant toujours d'appliquer ce foncteur au complexe filtré de poids avec action du groupe G, on verra que cette opération commute avec celle consistant à associer à un diagramme cubique son complexe filtré simple.

On définit tout d'abord la catégorie des complexes filtrés bornés par le haut :

Définition et Proposition 4.2.1. *On note $\mathcal{C}_-$ la catégorie des complexes bornés par le haut de $\mathbb{Z}_2$-espaces vectoriels munis d'une filtration croissante bornée, et des morphismes de complexes filtrés.*

Cette catégorie possède des propriétés similaires à celle de la catégorie $\mathcal{C}$:

- *tout objet de $\mathcal{C}_-$ induit une suite spectrale qui converge vers l'homologie de celui-ci,*
- *on y définit des quasi-isomorphismes filtrés de la même façon -on les appellera parfois quasi-isomorphismes de $\mathcal{C}_-$- et on note $H \circ \mathcal{C}_-$ la localisation de $\mathcal{C}_-$ par rapport à ceux-ci,*
- *on peut également associer à tout diagramme cubique dans $\mathcal{C}_-$ un complexe simple filtré (borné ici seulement par le haut).*

Regardons alors comment le foncteur $L^G : \mathcal{D}^G \to \mathcal{D}_-$, ou plutôt le foncteur $L^G : H \circ \mathcal{D}^G \to H \circ \mathcal{D}_-$, "s'étend" naturellement en un foncteur $L^G : H \circ \mathcal{C}^G \to H \circ \mathcal{C}_-$.

Remarque 4.2.2. Dans la suite, on écrira tout simplement L pour L^G lorsque le contexte sera explicite.

Proposition 4.2.3. *Soit $(K_*, J) \in \mathcal{C}^G$. Soit $... \to F_2 \xrightarrow{\Delta_2} F_1 \xrightarrow{\Delta_1} F_0 \to \mathbb{Z} \to 0$ une résolution de $\mathbb{Z}$ par des $\mathbb{Z}[G]$-modules projectifs (ou $... \to F_2 \xrightarrow{\Delta_2} F_1 \xrightarrow{\Delta_1} F_0 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$ une résolution de $\mathbb{Z}_2$ par des $\mathbb{Z}_2[G]$-modules projectifs).*

La filtration croissante bornée équivariante J du complexe K_* induit une filtration $\mathcal{J}$ sur $L_*(K_*)$ définie par

$$\mathcal{J}_\alpha L_k(K_*) := L_k(J_\alpha K_*).$$

Le complexe $L_*(K_*)$ muni de sa filtration $\mathcal{J}$ devient alors un élément de $\mathcal{C}_-$ qui, dans $H \circ \mathcal{C}_-$, est indépendant de la résolution choisie.

Démonstration. Pour tous p, q, on a une suite croissante bornée de $\mathbb{Z}_2$-sous-espaces vectoriels de $Hom_G(F_{-p}, K_q)$

$$0 \subset ... \subset Hom_G(F_{-p}, J_{\alpha-1}K_q) \subset Hom_G(F_{-p}, J_\alpha K_q) \subset ... \subset Hom_G(F_{-p}, K_q),$$

induite naturellement par la filtration croissante bornée J sur le complexe K_*.

Ainsi, pour tout k, $L_k(K_*)$ possède une filtration croissante bornée

$$0 \subset ... \subset L_k(J_{\alpha-1}K_*) \subset L_k(J_\alpha K_*) \subset ... \subset L_k(K_*),$$

avec $L_k(J_\alpha K_*) = \bigoplus_{p+q=k} Hom_G(F_{-p}, J_\alpha K_q)$, et celles-ci induisent alors une filtration $\mathcal{J}$ sur $L_*(K_*)$ où $\mathcal{J}_\alpha L_k(K_*) = L_k(J_\alpha K_*)$.

Montrons à présent que deux résolutions projectives différentes fournissent des complexes filtrés quasi-isomorphes dans $\mathcal{C}_-$.

Soient donc $(F_i)_i$ et $(F'_j)_j$ deux résolutions de $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}_2$) par des $\mathbb{Z}[G]$-modules (resp. $\mathbb{Z}_2[G]$-modules) projectifs. On considère $\mathcal{J}L_*(K_*)$ et $\mathcal{J}'L'_*(K_*)$ les complexes filtrés respectifs associés, puis E^r et E'^r les suites spectrales induites respectivement. On a

$$E^0_{p,q} = \frac{\mathcal{J}_p L_{p+q}}{\mathcal{J}_{p-1} L_{p+q}} = \frac{\bigoplus_{a+b=p+q} Hom_G(F_{-a}, J_p K_b)}{\bigoplus_{a+b=p+q} Hom_G(F_{-a}, J_{p-1} K_b)} = \bigoplus_{a+b=p+q} Hom_G\left(F_{-a}, \frac{J_p K_b}{J_{p-1} K_b}\right)$$

(les modules F_i sont projectifs). Ainsi, pour tout p, $E^0_{p,*} = L_{p+*}\left(\frac{J_p K_*}{J_{p-1} K_*}\right)$ et de même, $E'^0_{p,*} = L'_{p+*}\left(\frac{J_p K_*}{J_{p-1} K_*}\right)$. Ces deux complexes calculent l'homologie du groupe G à valeurs dans le complexe $\frac{J_p K_*}{J_{p-1} K_*}$, induisant un isomorphisme entre E^1 et E'^1.

□

La fonctorialité de $L : \mathcal{D}^G \to H \circ \mathcal{D}^-$ induit celle de $L : \mathcal{C}^G \to H \circ \mathcal{C}_-$. De plus :

Proposition 4.2.4. *Le foncteur*

$$L : \mathcal{C}^G \to H \circ \mathcal{C}_- \ ; \ (K_*, J) \mapsto (L_*(K_*), \mathcal{J})$$

préserve les quasi-isomorphismes filtrés, induisant ainsi un foncteur

$$L : H \circ \mathcal{C}^G \to H \circ \mathcal{C}_- \ ; \ (K_*, J) \mapsto (L_*(K_*), \mathcal{J})$$

que l'on note également L.

Démonstration. Soit $\varphi : K_* \to M_*$ un quasi-isomorphisme de $\mathcal{C}^G$ et soient J et I les filtrations respectives de K_* et M_*. On a vu que

$$E^{0\ (L_*(K_*))}_{p,q} = \bigoplus_{a+b=p+q} Hom_G\left(F_{-a}, \frac{J_pK_b}{J_{p-1}K_b}\right) = L_{p+q}\left(E^{0\ (K_*)}_{p,*-p}\right),$$

et

$$E^{0\ (L_*(M_*))}_{p,q} = \bigoplus_{a+b=p+q} Hom_G\left(F_{-a}, \frac{I_pM_b}{I_{p-1}M_b}\right) = L_{p+q}\left(E^{0\ (M_*)}_{p,*-p}\right).$$

Or, pour tout p, le morphisme $\varphi : K_* \to M_*$ induit un quasi-isomorphisme équivariant $E^{0\ (K_*)}_{p,*-p} \to E^{0\ (M_*)}_{p,*-p}$, et donc, par fonctorialité de $L : H \circ \mathcal{D}^G \to H \circ \mathcal{D}_-$, un quasi-isomorphisme

$$E^{0\ (L_*(K_*))}_{p,*-p} = L_*\left(E^{0\ (K_*)}_{p,*-p}\right) \to E^{0\ (L_*(M_*))}_{p,*-p} = L_*\left(E^{0\ (M_*)}_{p,*-p}\right),$$

i.e, pour tout q, un isomorphisme

$$E^{1\ (L_*(K_*))}_{p,q} = H_{p+q}\left(E^{0\ (L_*(K_*))}_{p,*-p}\right) = H_{p+q}\left(L_*\left(E^{0\ (K_*)}_{p,*-p}\right)\right) \to E^{1\ (L_*(M_*))}_{p,q} = H_{p+q}\left(L_*\left(E^{0\ (M_*)}_{p,*-p}\right)\right).$$

□

Concernant la fonctorialité de L par rapport au groupe, on a :

Proposition 4.2.5. *Soient G' un autre groupe fini et $\varphi : G \to G'$ un morphisme de groupes. Soit JK_* un complexe de $\mathcal{C}^{G'}$. Alors la structure de G-complexe obtenue sur K_* via φ est compatible avec la filtration de K_*, et φ induit un morphisme de $\mathcal{C}_-$*

$$L^{G'}_*(K_*) \to L^G_*(K_*)$$

(en considérant une résolution projective respectivement pour G' et G).

Démonstration. : Comme, pour tout $x \in K$ et tout $g \in G$, $g.x = \varphi(g).x$ par définition, G laisse également stable la filtration de K.

On montre ensuite que le morphisme $L^{G'}_*(K_*) \to L^G_*(K_*)$, que l'on note ψ, induit par φ (dans $\mathcal{D}_-$), est un morphisme de complexes filtrés.

Soit $f = \sum f_{p,q} \in \mathcal{J}_\alpha L^{G'}_k(K_*) = L^{G'}_k(J_\alpha K_*) = \bigoplus_{p+q=k} Hom_{G'}(F'_{-p}, J_\alpha K_q)$. Alors

$$\psi\left(\sum f_{p,q}\right) = \sum f_{p,q} \circ \varphi \in \bigoplus_{p+q=k} Hom_G(F_{-p}, J_\alpha K_q) = \mathcal{J}_\alpha L^G_k(K_*).$$

□

On considère ci-dessous le cas particulier de l'application de L^G à la filtration canonique. On calcule la suite spectrale induite et on note qu'après réindexation, celle-ci coïncide avec la suite spectrale de Hochschild-Serre associée au G-complexe de départ :

Lemme 4.2.6. *Soit (K_*, ∂_*) un G-complexe muni de la filtration canonique F^{can}. On considère alors le complexe filtré induit $\mathcal{F}^{can}L_*(K_*)$. Notons E la suite spectrale induite.*
On a, pour $p, q \in \mathbb{Z}$,

$$E^1_{p,q} = H^{-2p-q}(G, H_{-p}(K_*)),$$

et pour tout $r \geq 1$,

$$E^r_{p,q} = {}_IE^{r+1}_{2p+q,-p}.$$

Démonstration. Soit (F_*, Δ_*) une résolution projective sur $\mathbb{Z}[G]$ de $\mathbb{Z}$ (ou sur $\mathbb{Z}_2[G]$ de $\mathbb{Z}_2$). Soient $k, p \in \mathbb{Z}$, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{can}_p L_q(K_*) &= L_q\left(F^{can}_p K_*\right) \\
&= \bigoplus_{\alpha+\beta=q} Hom_G\left(F_{-\alpha}, F^{can}_p K_\beta\right) \\
&= \left(\bigoplus_{\substack{\alpha+\beta=k \\ \beta>-p}} Hom_G(F_{-\alpha}, K_\beta)\right) \oplus Hom_G\left(F_{-(p+q)}, ker\ \partial_{-p}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned}
E^0_{p,q-p} &= \frac{\mathcal{F}^{can}_p L_q(K_*)}{\mathcal{F}^{can}_{p-1} L_q(K_*)} \\
&= \frac{Hom_G\left(F_{-(p+q-1)}, K_{-p+1}\right)}{Hom_G\left(F_{-(p+q-1)}, ker\ \partial_{-p+1}\right)} \oplus Hom_G\left(F_{-(p+q)}, ker\ \partial_{-p}\right) \\
&= Hom_G\left(F_{-(p+q-1)}, K_{-p+1}/ker\partial_{-p+1}\right) \oplus Hom_G\left(F_{-(p+q)}, ker\partial_{-p}\right),
\end{aligned}$$

et si $w = \overline{u} \oplus v \in E^0_{p,q-p}$,

$$d^0_{p,q-p}(w) = \overline{u} \circ \Delta_{-(p+q-2)} \oplus \left(\partial_{-p+1} \circ u + v \circ \Delta_{-(p+q-1)}\right) \in E^0_{p,q-p-1}.$$

Cela revient à dire que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, le complexe $E^0_{p,*-p}$ est le complexe simple associé au diagramme (ou le mapping cone du morphisme de complexes) :

$$\phi : Hom_G\left(F_{-(p+*)}, K_{-p+1}/ker\partial_{-p+1}\right) \to Hom_G\left(F_{-(p+*)}, ker\partial_{-p}\right).$$

Or, soit $p \in \mathbb{Z}$, en vertu de l'exactitude de

$$0 \to K_{-p+1}/ker\partial_{-p+1} \to ker\partial_{-p} \to H_{-p}(K_*) \to 0$$

et de la projectivité des F_i, la suite courte de complexes

$$0 \to Hom_G\left(F_{-(p+*)}, K_{-p+1}/ker\partial_{-p+1}\right) \to Hom_G\left(F_{-(p+*)}, ker\partial_{-p}\right) \to Hom_G\left(F_{-(p+*)}, H_{-p}(K_*)\right) \to 0$$

est exacte.

En conséquence, en notant $A_* := Hom_G\left(F_{-(p+*)}, K_{-p+1}/ker\partial_{-p+1}\right)$ et $B_* := Hom_G\left(F_{-(p+*)}, ker\partial_{-p}\right)$, on a le diagramme commutatif de suites exactes longues d'homologie suivant

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \rightarrow & H_n\left(A_*\right) & \rightarrow & H_n\left(B_*\right) & \rightarrow & H_n\left(Cone(\phi)\right) & \rightarrow & H_{n-1}\left(A_*\right) & \rightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow = & & \\
\cdots & \rightarrow & H_n\left(A_*\right) & \rightarrow & H_n\left(B_*\right) & \rightarrow & H_n\left(Hom_G\left(F_{-(p+k)}, H_{-p}(K_*)\right)\right) & \rightarrow & H_{n-1}\left(A_*\right) & \rightarrow & \cdots
\end{array}$$

En utilisant alors le lemme des cinq, on en déduit que $E^0_{p,*-p} = Cone(\phi)$ est quasi-isomorphe au complexe $Hom_G\left(F_{-(p+*)}, H_{-p}(K_*)\right)$.

Ainsi, pour tous $p,\ q \in \mathbb{Z}$,

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}\left(E^0_{p,*-p}\right) \cong H_{p+q}\left(Hom_G\left(F_{-(p+*)}, H_{-p}(K_*)\right)\right) = H^{-2p-q}(G, H_{-p}(K_*)).$$

Le fait que cet isomorphisme soit naturel, que les différentielles de la suite spectrale associée au complexe filtré $\mathcal{F}^{can}L_*(K_*)$ et celles de la suite spectrale de Hochschild-Serre associée au G-complexe K_* (en considérant la résolution projective F_*) soient induites par les mêmes morphismes, implique que ces deux dernières sont naturellement isomorphes à partir de la page 2 (après réindexation de la première). $\square$

On termine cette section par un point qui va se révéler essentiel pour la suite : le foncteur L^G commute avec l'opération consistant à associer à un diagramme cubique dans $\mathcal{C}^G$ (resp. $\mathcal{C}_-$) son complexe filtré simple. En effet, cela nous permettra de déduire l'acyclicité et l'additivité du complexe de poids équivariant -que l'on définira juste après en appliquant le foncteur L au complexe de poids avec action- directement de celles du complexe de poids non-équivariant.

Proposition 4.2.7. *Le foncteur L commute avec l'opération $\mathbf{s}$: soit $\mathcal{K}$ un $\square_n^+$-diagramme cubique dans $\mathcal{C}^G$, alors $\mathbf{s}(L_*(\mathcal{K})) = L_*(\mathbf{s}\mathcal{K})$ (dans $\mathcal{C}_-$ si l'on prend bien la même résolution projective dans les deux membres de l'égalité).*

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que pour $\mathcal{K} = (K_{*,S})_{S\subset\{0,1,\ldots,n\}}$ un $\square_n^+$-diagramme cubique dans $\mathcal{C}^G$, $L_*(\mathcal{K})$ est le $\square_n^+$-diagramme cubique $(L_*(K_{*,S}))_{S\subset\{0,1,\ldots,n\}}$ dans $\mathcal{C}_-$ (L est un foncteur donc transforme un diagramme cubique en un diagramme cubique).

Pour montrer l'égalité des complexes $\mathbf{s}(L_*(\mathcal{K}))$ et $L_*(\mathbf{s}\mathcal{K})$, on procède en deux étapes. On étudie dans un premier temps le complexe $L_*(\mathbf{s}\mathcal{K})$ et sa différentielle en les décomposant en les plus petites "briques" possibles, puis on fait de même avec $\mathbf{s}(L_*(\mathcal{K}))$ et on compare ces briques pour vérifier que ce sont les mêmes.

On conclut enfin en montrant l'égalité des filtrations.

Etape 1 : Le complexe $L_*(\mathbf{s}\mathcal{K})$.

Pour k fixé on a

$$\begin{aligned}
L_k(\mathbf{s}\mathcal{K}_*) &= \bigoplus_{p+q=k} Hom_G(F_{-p}, \mathbf{s}\mathcal{K}_q) \\
&= \bigoplus_{p+q=k} Hom_G(F_{-p}, \bigoplus_{i+|S|-1=q} K_{i,S}) \\
&= \bigoplus_{p+q=k} \bigoplus_{i+|S|-1=q} Hom_G(F_{-p}, K_{i,S}) \\
&= \bigoplus_{p} \bigoplus_{S\subset\{0,1,\dots,n\}} Hom_G(F_{-p}, K_{k-p-|S|+1,S}).
\end{aligned}$$

Notons ∂_* la différentielle de $\mathbf{s}\mathcal{K}_*$, et δ_* la différentielle de $L_*(\mathbf{s}\mathcal{K}_*)$ induite. Alors $\delta_k = \sum_{p+q=k}\delta_{p,q}$ avec

$$\delta_{p,q} : \begin{array}{ccc} Hom_G(F_{-p}, K_q) & \to & Hom_G(F_{-p+1}, K_q) \oplus Hom_G(F_{-p}, \mathbf{s}K_{q-1}) \\ u & \mapsto & u\circ\Delta_{-p+1} \oplus \partial_q \circ u \end{array}.$$

Soit $u = \sum_{p,q} u_{p,q} \in L_k(\mathbf{s}\mathcal{K}_*) = \bigoplus_{p+q=k} Hom_G(F_{-p}, \mathbf{s}\mathcal{K}_q)$. Pour tous p, q, $u_{p,q} = \sum_{i,S} u_{p,q}^{i,S} \in \bigoplus_{i+|S|-1=q} Hom_G(F_{-p}, K_{i,S})$. Alors, en notant, pour S fixé, ρ_k^S la différentielle du complexe $K_{*,S}$,

$$\begin{aligned}
\delta_k(u) &= \sum_{p,q} [u_{p,q}\circ\Delta_{-p+1} + \partial_q \circ u_{p,q}] \\
&= \sum_{p,q} \left[\left(\sum_{i,S} u_{p,q}^{i,S}\circ\Delta_{-p+1}\right) + \left(\sum_{i,S} \partial_q\circ u_{p,q}^{i,S}\right)\right] \\
&= \sum_{p,q} \left[\sum_{i,S} \left(u_{p,q}^{i,S}\circ\Delta_{-p+1}\right) + \sum_{i,S} \left(\partial'_{i,S}\circ u_{p,q}^{i,S} + \partial''_{i,S}\circ u_{p,q}^{i,S}\right)\right] \\
&= \sum_{p,q} \left[\sum_{i,S} \left(u_{p,q}^{i,S}\circ\Delta_{-p+1}\right) + \sum_{i,S} \left(\rho_i^S\circ u_{p,q}^{i,S} + \sum_T \partial_{T,S}\circ u_{p,q}^{i,S}\right)\right] \\
&= \sum_{p+q=k} \sum_{i+|S|-1=q} \left[u_{p,q}^{i,S}\circ\Delta_{-p+1} + \rho_i^S\circ u_{p,q}^{i,S} + \sum_T \left(\partial_{T,S}\circ u_{p,q}^{i,S}\right)\right] \\
&= \sum_p \sum_S \left[u_{p,k-p}^{k-p-|S|+1,S}\circ\Delta_{-p+1} + \rho_{k-p+|S|+1}^S\circ u_{p,k-p}^{k-p+|S|+1,S} + \sum_T \left(\partial_{T,S}\circ u_{p,k-p}^{k-p+|S|+1,S}\right)\right] \\
&=: \sum_{p,S} \Lambda_{p,S}^k \left(u_{p,k-p}^{k-p-|S|+1,S}\right)
\end{aligned}$$

Etape 2 : Le complexe $\mathbf{s}(L_*(\mathcal{K}))_*$.

Pour k fixé, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}(L_*(\mathcal{K}))_k &= \bigoplus_{i+|S|-1=k} L_i(K_{*,S}) \\
&= \bigoplus_{i+|S|-1=k} \bigoplus_{p+q=i} Hom_G(F_{-p}, K_{q,S}) \\
&= \bigoplus_{S\subset\{0,1,\ldots,n\}} \bigoplus_{p} Hom_G(F_{-p}, K_{k-p-|S|+1,S}) \\
&= L_k(\mathbf{s}\mathcal{K}_*)
\end{aligned}$$

Notons τ_* la différentielle de $\mathbf{s}(L_*(\mathcal{K}))_*$.
Soit $v = \sum_{i,S} v^{i,S} \in \mathbf{s}(L_*(\mathcal{K}))_k = \bigoplus_{i+|S|-1=k} L_i(K_{*,S})$. Pour tous i, S, $v^{i,S} = \sum_{p,q} v^{i,S}_{p,q} \in L_i(K_{*,S}) = \bigoplus_{p+q=i} Hom_G(F_{-p}, K_{q,S})$. Alors

$$\begin{aligned}
\tau_k(v) &= \sum_{i,S} \left[\tau'_{i,s}\left(v^{i,S}\right) + \tau''_{i,S}\left(v^{i,S}\right)\right] \\
&= \sum_{i,S} \left[\sum_{p,q} \left(v^{i,S}_{p,q} \circ \Delta_{-p+1} + \rho^S_q \circ v^{i,S}_{p,q}\right) + \sum_T L_i\left(\partial_{T,S}\right)\left(v^{i,S}\right)\right] \\
&= \sum_{i,S} \left[\sum_{p,q} \left(v^{i,S}_{p,q} \circ \Delta_{-p+1} + \rho^S_q \circ v^{i,S}_{p,q}\right) + \sum_T \left(\sum_{p,q} \partial_{T,S} \circ v^{i,S}_{p,q}\right)\right] \\
&= \sum_{i+|S|-1=k} \sum_{p+q=i} \left[v^{i,S}_{p,q} \circ \Delta_{-p+1} + \rho^S_q \circ v^{i,S}_{p,q} + \sum_T \left(\partial_{T,S} \circ v^{i,S}_{p,q}\right)\right] \\
&= \sum_S \sum_p \left[v^{k-|S|+1,S}_{p,k-|S|+1-p} \circ \Delta_{-p+1} + \rho^S_{k-|S|+1-p} \circ v^{k-|S|+1,S}_{p,k-|S|+1-p} + \sum_T \left(\partial_{T,S} \circ v^{k-|S|+1,S}_{p,k-|S|+1-p}\right)\right] \\
&= \sum_{p,S} \Lambda^k_{p,S}\left(v^{k-|S|+1,S}_{p,k-|S|+1-p}\right)
\end{aligned}$$

Si $w \in L_k(\mathbf{s}\mathcal{K}_*) = \mathbf{s}(L_*(\mathcal{K}))_k$,

$$w = \sum_{p+q=k} \sum_{i+|S|-1=q} w^{i,S}_{p,q} = \sum_{p,S} w^{k-p-|S|+1,S}_{p,k-p}$$

avec $w^{k-p-|S|+1,S}_{p,k-p} \in Hom_G(F_{-p}, K_{k-p-|S|+1,S})$, et

$$w = \sum_{i+|S|-1=k} \sum_{p+q=i} \xi^{i,S}_{p,q} = \sum_{p,S} \xi^{k-|S|+1,S}_{p,k-|S|+1-p}$$

avec $\xi^{k-|S|+1,S}_{p,k-|S|+1-p} \in Hom_G(F_{-p}, K_{k-p-|S|+1,S})$.

Par unicité de la décomposition en somme directe, pour tout p et tout S, $w^{k-p-|S|+1,S}_{p,k-p} = \xi^{k-|S|+1,S}_{p,k-|S|+1-p}$ et on a donc

$$\delta_k(w) = \sum_{p,S} \Lambda^k_{p,S}\left(w^{k-p-|S|+1,S}_{p,k-p}\right) = \sum_{p,S} \Lambda^k_{p,S}\left(\xi^{k-|S|+1,S}_{p,k-|S|+1-p}\right) = \tau(w).$$

Ainsi, les complexes $(L_k(\mathbf{s}\mathcal{K}_*), \delta_*)$ et $(\mathbf{s}(L_*(\mathcal{K}))_*, \tau_*)$ de $\mathcal{C}_-$ sont identiques.

Enfin, prenons en compte les filtrations. Pour $S \subset \{0,1,...,n\}$, on note J^S la filtration du complexe $K_{*,S}$ et on note J la filtration induite sur le complexe simple $\mathbf{s}\mathcal{K}$. On note ensuite $\mathcal{J}^S$ la filtration induite sur $L_*(K_{*,S})$ et $\mathcal{J}$ la filtration associée sur le complexe simple $\mathbf{s}(L_*(\mathcal{K}))$. On note enfin $\mathcal{J}'$ la filtration induite par J sur $L_*(\mathbf{s}\mathcal{K})$.

On veut vérifier que la filtration obtenue après avoir considéré le complexe simple associé au diagramme cubique $\mathcal{K}$ puis appliqué L est la même que celle obtenue après avoir appliqué L puis considéré le complexe simple.

Pour tout p, on a $\mathcal{J}'_p L_*(\mathbf{s}\mathcal{K}) = L_*(J_p(\mathbf{s}\mathcal{K})) = L_*(\mathbf{s}(J_p\mathcal{K})) = \mathbf{s}(L_*(J_p\mathcal{K})) = \mathbf{s}(\mathcal{J}_p L_*(\mathcal{K})) = \mathcal{J}_p\mathbf{s}(L_*(\mathcal{K}))$.

□

4.3 Complexe de poids équivariant

Avant de définir enfin le complexe filtré de poids équivariant sur les G-variétés algébriques réelles, précisons l'homologie sur laquelle il va induire une filtration par le poids que l'on dira équivariante.

Définition 4.3.1. *Soit X une G-variété algébrique réelle de $\mathbf{Sch}^G_c(\mathbb{R})$. On note $C^G_*(X) := L^G_*(C_*(X))$ et, pour $n \in \mathbb{Z}$, on associe à X*

$$H_n(X;G) := H_n(G, C_*(X)) = H_n(C^G_*(X)),$$

son n-ième groupe d'homologie équivariante, où $C_*(X)$ est le G-complexe des chaînes semi-algébriques à supports fermés de l'ensemble des points réels de X.

Remarque 4.3.2.
- Par fonctorialité de L, ces constructions sont fonctorielles.
- Cet invariant sur $\mathbf{Sch}^G_c(\mathbb{R})$ qu'est l'homologie équivariante prend en compte la topologie de l'ensemble des points réels de la G-variété algébrique réelle considérée, l'action de G sur celui-ci, mais également de la structure du groupe G lui-même, comme nous l'indique la suite spectrale de Hochschild-Serre

  $$_I E^2_{p,q} = H^{-p}(G, H_q(X)) \Rightarrow H_{p+q}(X;G).$$

  Cette suite spectrale est la même que dans [35] Chapter III Proposition 5.2, nous montrant que notre homologie équivariante 4.3.1 est égale à l'homologie équivariante de J. van Hamel définie dans [35] Chapter III Definition 1.2 (du moins sur les G-variétés algébriques réelles compactes).

– Pour $G = \{e\}$, $H_n(X; G) = H_n(X)$.

Exemple 4.3.3. Calcul de la suite spectrale de Hochschild-Serre associée à une action de $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur une sphère X de dimension 2, d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Action $(x, y) \mapsto (-x, y)$. On écrit le terme ${}_IE^2_{p,q}(X) = H^{-p}(G, H_q(X))$:

$$\begin{array}{cccccc} \dots & \mathbb{Z}_2[X] & \dots & \mathbb{Z}_2[X] & \mathbb{Z}_2[X] \\ \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \mathbb{Z}_2[\{p_0\}] & \dots & \mathbb{Z}_2[\{p_0\}] & \mathbb{Z}_2[\{p_0\}] \end{array}$$

   où p_0 est un point de X que l'on choisit dans l'ensemble X^G des points fixes pour la suite des calculs. Ainsi, comme les morphismes des lignes du complexe double induisant cette suite spectrale sont tous du type $1 + \sigma$, les différentielles d^r partant des termes de la ligne $p = 0$ sont triviales, quelque soit la page ${}_IE^r(X)$ de la suite spectrale pour $r \geq 2$.

   La suite spectrale converge donc au terme ${}_IE^2(X)$ et

$$H_k(X; G) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2[X] \text{ si } k = 1 \text{ ou } 2, \\ \mathbb{Z}_2[X] \oplus \mathbb{Z}_2[\{p_0\}] \text{ si } k \leq 0. \end{cases}$$

2. Action $(x, y) \mapsto (-x, -y)$. Le terme ${}_IE^2_{p,q}(X)$ est identique au cas précédent. Le point p_0 ne peut cependant plus être choisi dans l'ensemble des points fixes X^G qui est vide, et l'image de $[\{p_0\}]$ par la différentielle d^3 est $[X]$. La suite spectrale converge donc à la page ${}_IE^4(X)$ qui s'écrit

$$\begin{array}{ccccc} \dots & 0 & \dots & \mathbb{Z}_2[X] & \mathbb{Z}_2[X] \\ \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}$$

   et on a

$$H_k(X; G) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2[X] \text{ si } k = 0, \ 1 \text{ ou } 2 \\ 0 \text{ si } k < 0. \end{cases}$$

On peut également déterminer la dimension de l'homologie équivariante pour $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ grâce à la formule suivante, obtenue en considérant la suite spectrale ${}_{II}E$:

Exemple 4.3.4. Soient $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et X une G-variété algébrique réelle. Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$H_k(X; G) = (ker\ \partial_k)^G / \partial_d \left((C_{k+1}(X))^G \right) \oplus \bigoplus_{i \geq k+1} H_i \left(X^G \right).$$

Démonstration. On considère le complexe double

$$\begin{array}{ccccccc}
C_d(X) & \xrightarrow{1+\sigma} & C_d(X) & \xrightarrow{1+\sigma} & C_d(X) & \rightarrow \\
\downarrow \partial_d & & \downarrow \partial_d & & \downarrow \partial_d & \\
C_{d-1}(X) & \xrightarrow{1+\sigma} & C_{d-1}(X) & \xrightarrow{1+\sigma} & C_{d-1}(X) & \rightarrow \\
\downarrow \partial_{d-1} & & \downarrow \partial_{d-1} & & \downarrow \partial_{d-1} & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\downarrow \partial_2 & & \downarrow \partial_2 & & \downarrow \partial_2 & \\
C_1(X) & \xrightarrow{1+\sigma} & C_1(X) & \xrightarrow{1+\sigma} & C_1(X) & \rightarrow \\
\downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_1 & \\
C_0(X) & \xrightarrow{1+\sigma} & C_0(X) & \xrightarrow{1+\sigma} & C_0(X) & \rightarrow
\end{array}$$

où d est la dimension de X. L'homologie du complexe total associé calcule l'homologie équivariante de X par définition.

La suite spectrale ${}_{II}E$ associée est calculée en considérant d'abord l'homologie sur les lignes du complexe double, puis celle sur les colonnes. La page ${}_{II}E^1$ est donc :

$$\begin{array}{ccc}
(C_d(X))^G & C_d\left(X^G\right) & C_d\left(X^G\right) \\
\downarrow \partial_d & \downarrow \partial_d & \downarrow \partial_d \\
(C_{d-1}(X))^G & C_{d-1}\left(X^G\right) & C_{d-1}\left(X^G\right) \\
\downarrow \partial_{d-1} & \downarrow \partial_{d-1} & \downarrow \partial_{d-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\downarrow \partial_2 & \downarrow \partial_2 & \downarrow \partial_2 \\
(C_1(X))^G & C_1\left(X^G\right) & C_1\left(X^G\right) \\
\downarrow \partial_1 & \downarrow \partial_1 & \downarrow \partial_1 \\
(C_0(X))^G & C_0\left(X^G\right) & C_0\left(X^G\right)
\end{array}$$

On utilise ici les suites exactes courtes de Smith

$$0 \rightarrow C_k\left(X^G\right) \oplus (1+\sigma)C_k(X) \rightarrow C_k(X) \rightarrow (1+\sigma)C_k(X) \rightarrow 0.$$

Le terme ${}_{II}E^2$ est ensuite

$$\begin{array}{ccc}
(ker\ \partial_d)^G & H_d\left(X^G\right) & H_d\left(X^G\right) \\
 & & \\
(ker\ \partial_{d-1})^G / \partial_d\left((C_d(X))^G\right) & H_{d-1}\left(X^G\right) & H_{d-1}\left(X^G\right) \\
 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
 & & \\
(ker\ \partial_1)^G / \partial_2\left((C_2(X))^G\right) & H_1\left(X^G\right) & H_1\left(X^G\right) \\
 & & \\
(C_0(X))^G / \partial_1\left((C_1(X))^G\right) & H_0\left(X^G\right) & H_0\left(X^G\right)
\end{array}$$

On remarque alors que la différentielle ${}_{II}d^2$ ainsi que les différentielles des pages suivantes sont triviales (pour calculer l'image d'un élément de $H_k(X^G)$, on considère un de ses représentants qui est donc dans $ker\ \partial_k$, or la première étape consiste justement à lui appliquer ∂_k). Ainsi, la suite spectrale converge à la page 2 et, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$H_k(X;G) = (ker\ \partial_k)^G/\partial_d((C_{k+1}(X))^G) \oplus \bigoplus_{i \geq k+1} H_i(X^G).$$

□

Définissons enfin le complexe de poids équivariant. Rappelons que pour toute G-variété algébrique réelle X, le complexe de poids avec action $\mathcal{W}C_*(X)$ est un élément de $H \circ \mathcal{C}^G$. On va donc pouvoir lui appliquer le foncteur L pour obtenir un élément de $H \circ \mathcal{C}_-$:

Définition 4.3.5. *Soit $X \in \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$. On note*

$$\Omega C_*^G(X) := L_*(\mathcal{W}C_*(X)) \in H \circ \mathcal{C}_-,$$

le complexe de poids équivariant de X.

On note, pour X une G-variété algébrique réelle, $\mathcal{F}^{can}C_*^G(X) := L_*(F^{can}C_*(X))$. Comme son analogue non-équivariant, le complexe filtré de poids équivariant est une extension de cette filtration canonique équivariante, acyclique et additif, unique à quasi-isomorphisme de $\mathcal{C}_-$ près :

Théorème 4.3.6.

$$\Omega C_*^G : \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{C}_- \ ;\ X \mapsto \Omega C_*^G(X)$$

est un foncteur, extension du foncteur

$$\mathcal{F}^{can}C_*^G : \mathbf{V}^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{C}_- \ ;\ X \mapsto \mathcal{F}^{can}C_*^G(X),$$

et qui vérifie les propriétés suivantes :

1. *Acyclicité : Pour tout carré acyclique dans $\mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$, le complexe filtré simple du $\square_1^+$-diagramme dans $\mathcal{C}_-$*
$$\begin{array}{ccc} \Omega C_*^G(\widetilde{Y}) & \to & \Omega C_*^G(\widetilde{X}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega C_*^G(Y) & \to & \Omega C_*^G(X) \end{array}$$
est acyclique.
2. *Additivité : Pour une inclusion fermée équivariante $Y \subset X$, le complexe filtré simple du $\square_0^+$-diagramme dans $\mathcal{C}_-$*
$$\Omega C_*^G(Y) \to \Omega C_*^G(X)$$
est isomorphe dans $H \circ \mathcal{C}_-$ à $\Omega C_*^G(X \setminus Y)$.

De plus, tout autre foncteur $\mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{C}_-$ avec ces trois propriétés sera quasi-isomorphe dans $\mathcal{C}_-$ à ΩC_*^G à un unique quasi-isomorphisme de $\mathcal{C}_-$ près.

Démonstration. On vérifie tout d'abord les propriétés d'extension, d'acyclicité et d'additivité du complexe de poids équivariant, puis ensuite son unicité.

Propriété d'extension : $\Omega C_*^G : \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{C}_-$ est un foncteur en tant que composition du foncteur $\mathcal{W}C_* : \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{C}^G$ et du foncteur $L : H \circ \mathcal{C}^G \to H \circ \mathcal{C}_-$.
Comme de plus, $\mathcal{W}C_* : \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{C}^G$ est une extension du foncteur $F^{can}C_* : \mathbf{V}^G(\mathbb{R}) \longrightarrow H \circ \mathcal{C}^G$, $\Omega C_*^G : \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{C}_-$ est une extension du foncteur $\mathcal{F}^{can}C_*^G : \mathbf{V}^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{C}_-$ qui est la composition de $F^{can}C_* : \mathbf{V}^G(\mathbb{R}) \longrightarrow H \circ \mathcal{C}^G$ et de $L : H \circ \mathcal{C}^G \to H \circ \mathcal{C}_-$.

Acyclicité : Soit

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y} & \to & \widetilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \to & X \end{array}$$

un carré acyclique dans $\mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$. Alors

$$\mathbf{s}\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{W}C_*(\widetilde{Y}) & \to & \mathcal{W}C_*(\widetilde{X}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{W}C_*(Y) & \to & \mathcal{W}C_*(X) \end{array}\right)$$

est acyclique dans $H \circ \mathcal{C}^G$.

Or, en appliquant le foncteur L à un quasi-isomorphisme de $\mathcal{C}^G$, on obtient un quasi-isomorphisme de $\mathcal{C}_-$. Ainsi, le complexe

$$L_*\left(\mathbf{s}\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{W}C_*(\widetilde{Y}) & \to & \mathcal{W}C_*(\widetilde{X}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{W}C_*(Y) & \to & \mathcal{W}C_*(X) \end{array}\right)\right)$$

est quasi-isomorphe dans $\mathcal{C}_-$ à l'image par L du complexe nul dans $\mathcal{C}^G$, i.e. le complexe nul de $\mathcal{C}_-$.

Enfin, par la commutativité de L avec $\mathbf{s}$, on obtient

$$\begin{aligned} L_*\left(\mathbf{s}\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{W}C_*(\widetilde{Y}) & \to & \mathcal{W}C_*(\widetilde{X}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{W}C_*(Y) & \to & \mathcal{W}C_*(X) \end{array}\right)\right) &= \mathbf{s}\left(\begin{array}{ccc} L_*(\mathcal{W}C_*(\widetilde{Y})) & \to & L_*(\mathcal{W}C_*(\widetilde{X})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_*(\mathcal{W}C_*(Y)) & \to & L_*(\mathcal{W}C_*(X)) \end{array}\right) \\ &= \mathbf{s}\left(\begin{array}{ccc} \Omega C_*^G(\widetilde{Y}) & \to & \Omega C_*^G(\widetilde{X}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega C_*^G(Y) & \to & \Omega C_*^G(X) \end{array}\right) \end{aligned}$$

d'où l'acyclicité du foncteur ΩC_*^G.

Additivité : Soit une inclusion fermée équivariante $Y \subset X$, le complexe filtré simple

$$\mathbf{s}\left(\mathcal{W}C_*(Y) \to \mathcal{W}C_*(X)\right)$$

est quasi-isomorphe dans $\mathcal{C}^G$ à $\mathcal{W}C(X \setminus Y)$. En appliquant L et en utilisant encore une fois la commutativité avec l'opération $\mathbf{s}$, on obtient que

$$\mathbf{s}\left(\Omega C_*^G(Y) \to \Omega C_*^G(X)\right)$$

est quasi-isomorphe dans $\mathcal{C}_-$ à $\Omega C_*^G(X \setminus Y)$.

Unicité : Pour montrer l'unicité dans $H \circ \mathcal{C}_-$ du foncteur ΩC_*^G vis-à-vis de ces propriétés, on utilise le théorème 3.2.1, que l'on avait utilisé pour montrer l'unicité du complexe de poids avec action, appliqué cette fois à la catégorie $\mathcal{C}_-$ et au foncteur $L_*(F^{can} C_*) : \mathbf{V}^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{C}_-$.

En effet,

- la catégorie $\mathcal{C}_-$ est une catégorie de descente homologique, en tant que catégorie des complexes de chaînes bornés par le haut et munis d'une filtration croissante bornée (propriété (1.7.5) de l'article [14] de F. Guillén et V. Navarro Aznar).
- Le foncteur $\mathcal{F}^{can} C_*^G : \mathbf{V}^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{C}_-$ est Φ-rectifié, car, en fixant au préalable une résolution projective, il est défini sur $\mathcal{C}_-$.
- Il vérifie la condition (F1) : le foncteur $F^{can} C_* : \mathbf{V}^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{C}^G$ vérifie (F1) sur $H \circ \mathcal{C}^G$ et, pour tous complexes K, M de $H \circ \mathcal{C}^G$, $L(K \oplus M) = L(K) \oplus L(M)$.
- Il vérifie la condition (F2) : le foncteur $F^{can} C_* : \mathbf{V}^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{C}^G$ vérifie (F2) sur $H \circ \mathcal{C}^G$ et on applique alors le foncteur L, en utilisant la commutativité de celui-ci avec $\mathbf{s}$.

$\square$

Le complexe filtré de poids équivariant induit alors, de façon analogue au cadre non-équivariant, une filtration sur l'homologie équivariante des G-variétés algébriques réelles, en vertu de :

Proposition 4.3.7. *Soit X une G-variété algébrique réelle. Le complexe de poids équivariant $\Omega C_*^G(X)$ de X calcule l'homologie équivariante de X : pour tout n, on a*

$$H_n(\Omega C_*^G(X)) = H_n(X; G).$$

Démonstration. Considérons le foncteur d'oubli de la filtration $\mathcal{C}_- \to \mathcal{D}_-$. Il induit un foncteur $\varphi_- : H \circ \mathcal{C}_- \to H \circ \mathcal{D}_-$.

Composons φ_- avec $\Omega C_*^G : \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{C}_-$. Alors

$$\varphi_- \circ \Omega C_*^G = L \circ (\varphi^G \circ {}^G\mathcal{W}C_*)$$

(où $\varphi^G : H \circ \mathcal{C}^G \to H \circ \mathcal{D}^G$ est le foncteur induit par le foncteur d'oubli de la filtration $\mathcal{C}^G \to \mathcal{D}^G$ sur les catégories avec action de G), car, pour tout $X \in \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$, la filtration sur $\Omega C_*^G(X)$ est induite par celle sur ${}^G\mathcal{W}C_*(X)$.

Or, pour tout $X \in \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$, le complexe $\varphi^G \circ {}^G\mathcal{W}C_*(X)$ est quasi-isomorphe dans $\mathcal{D}^G$ à $C_*(X)$ (3.2.5), et en appliquant le foncteur L à un quasi-isomorphisme de $\mathcal{D}^G$, on obtient un quasi-isomorphisme de $\mathcal{D}_-$.

Donc, pour toute G-variété algébrique réelle X, le complexe $\varphi_-(\Omega C_*^G(X)) = L_*(\varphi^G({}^G\mathcal{W}C_*(X)))$ est quasi-isomorphe au complexe $L_*(C_*(X)) = C_*^G(X)$ i.e. pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$H_n(\Omega C_*^G(X)) = H_n(X; G).$$

$\square$

Remarque 4.3.8. Le foncteur L^G préservant les quasi-isomorphismes filtrés, si X est une G-variété algébrique réelle compacte non singulière, le complexe de poids équivariant $\Omega C_*^G(X) = L\left({}^G\mathcal{W}C_*(X)\right)$ de X est quasi-isomorphe dans $\mathcal{C}_-$ au complexe filtré $\mathcal{F}^{can}C_*^G(X) = L\left(F^{can}C_*(X)\right))$ (3.2.5). Il en sera de même pour toutes les réalisations du complexe de poids équivariant.

4.4 Suite spectrale de poids équivariante et filtration par le poids équivariante

Soit X une G-variété algébrique réelle. Comme dans le cadre non-équivariant, le complexe filtré de poids équivariant induit une suite spectrale sur laquelle on peut lire les conditions d'additivité et d'acyclicité.

Des différences notables vont cependant apparaître avec l'influence de la cohomologie du groupe G. La richesse de l'action du groupe G sur la variété X va en effet fournir une profusion d'informations pour l'appréhension desquelles l'étude de la simple suite spectrale de poids équivariante ne sera plus suffisante. Notamment, elle n'est plus bornée à gauche (4.4.12) et ne dégénère plus à la page 2 sur les variétés compactes non singulières (4.4.13, 4.3.3).

Cependant, l'observation à la loupe de deux autres suites spectrales (qui, en convergeant, en constituent les briques élémentaires) permet de mieux comprendre cette homologie équivariante sur les G-variétés algébriques réelles et d'extraire des invariants additifs à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (5.2.1, 5.2.3). Si ceux-ci se révèlent coïncider avec la dimension des groupes d'homologie équivariante sur les variétés compactes non singulières, ce seront alors les nombres de Betti virtuels équivariants ([12]).

4.4.1 Définitions et suites exactes longues d'additivité et d'acyclicité

Définition 4.4.1. *On appelle suite spectrale de poids équivariante, et on note* $\{{}^GE^r, {}^Gd^r\}$*, la suite spectrale associée au complexe de poids équivariant* $\Omega C_*^G(X)$.

La suite spectrale de poids équivariante converge vers l'homologie équivariante de X et :

Définition 4.4.2. *La filtration de l'homologie équivariante de X induite par la filtration du complexe de poids équivariant est appelée filtration par le poids équivariante de X et notée* Ω.

Afin de "faciliter" l'étude de la suite spectrale de poids équivariante, on effectue la même réindexation que pour le cadre non-équivariant :

$$p' = 2p + q,\ q' = -p,\ r' = r + 1,$$

pour obtenir une nouvelle suite spectrale notée ${}^G\widetilde{E}^2_{p',q'}$.

On lit les conditions d'additivité et d'acyclicité du complexe de poids équivariant en termes de suites exactes longues sur les termes ${}^G\widetilde{E}^2$ de la suite spectrale de poids réindexée. Dans ce cadre équivariant, ces suites ne sont cependant en général plus bornées (à droite ou à gauche selon l'orientation des flèches) comme on le verra au point suivant (4.4.9, 4.4.12).

Proposition 4.4.3. *Soit $Y \subset X$ une inclusion fermée équivariante. Pour tout q, on a une suite exacte longue*

$$... \to {}^G\widetilde{E}^2_{p,q}(Y) \to {}^G\widetilde{E}^2_{p,q}(X) \to {}^G\widetilde{E}^2_{p,q}(X \setminus Y) \to {}^G\widetilde{E}^2_{p-1,q}(Y) \to ...$$

Pour tout carré acyclique dans $\mathbf{Sch}^G_c(\mathbb{R})$ et pour tout q, on a la suite exacte longue

$$... \to {}^G\widetilde{E}^2_{p,q}(\widetilde{Y}) \to {}^G\widetilde{E}^2_{p,q}(Y) \oplus {}^G\widetilde{E}^2_{p,q}(\widetilde{X}) \to {}^G\widetilde{E}^2_{p,q}(X) \to {}^G\widetilde{E}^2_{p-1,q}(\widetilde{Y}) \to ...$$

Démonstration. Pour la suite exacte longue d'additivité, le raisonnement est identique à celui du cadre non-équivariant (preuve de 2.3.4).

Quant à la suite exacte longue d'acyclicité, l'acyclicité du complexe de poids équivariant nous fournit un quasi-isomorphisme dans $\mathcal{C}_-$:

$$\Omega C^G_*(X) \cong \mathbf{s}\left(\Omega C^G(\widetilde{Y}) \to \Omega C^G(Y) \oplus \Omega C^G(\widetilde{X})\right),$$

que l'on utilise de façon similaire pour obtenir la suite voulue. □

Remarque 4.4.4. La suite exacte longue d'acyclicité peut être obtenue de la même façon dans le cadre non-équivariant, et traduit pareillement l'acyclicité du complexe de poids.

4.4.2 Les deux suites spectrales qui convergent vers la suite spectrale de poids équivariante

Le fait crucial qui va nous aider par la suite est que le terme ${}^G\widetilde{E}^2$ de la suite spectrale de poids équivariante s'exprime comme étant l'homologie du groupe G à valeurs dans la suite spectrale de poids non-équivariante. En particulier, cela nous permettra de considérer les deux suites spectrales associées.

Proposition 4.4.5. *Pour tous p, q,*

$${}^G\widetilde{E}^2_{p,q} = H_p\left(G, \widetilde{E}^1_{*,q}\right).$$

Démonstration. : Pour tous p, q, ${}^GE^1_{p,q} = H_{p+q}\left({}^GE^0_{p,*-p}\right)$ et

$${}^GE^0_{p,*-p} = E^{0\ (L_*(\mathcal{W}C_*(X)))}_{p,*-p} = L_*\left(E^{0\ (\mathcal{W}C_*(X))}_{p,*-p}\right)$$

donc ${}^GE^1_{p,q} = H_{p+q}\left(L_*\left(E^0_{p,*-p}\right)\right) = H_{p+q}\left(G, E^0_{p,*-p}\right)$.

En réindexant les suites spectrales, on a alors

$${}^G\widetilde{E}^2_{p,q} = {}^GE^1_{-q,p+2q} = H_{p+q}\left(G, E^0_{-q,*+q}\right) = H_p\left(G, \widetilde{E}^1_{*,q}\right)$$

□

Deux suites spectrales convergent ainsi vers le terme ${}^G\widetilde{E}^2$ de la suite spectrale de poids équivariante :

Corollaire 4.4.6. *Pour tout q, on a deux suites spectrales*

$$ {}^{q}_{I}E^2_{\alpha,\beta} = H^{-\alpha}\left(G, \widetilde{E}^2_{\beta,q}\right) $$

$$ {}^{q}_{II}E^1_{\alpha,\beta} = H^{-\alpha}\left(G, \widetilde{E}^1_{\beta,q}\right) $$

qui convergent toutes deux vers $H_{\alpha+\beta}\left(G, \widetilde{E}^1_{*,q}\right)$ $(= {}^{G}\widetilde{E}^2_{\alpha+\beta,q})$.

Démonstration. Ce sont les suites spectrales qui convergent vers l'homologie du groupe G à valeurs dans le complexe $\widetilde{E}^1_{*,q}$. □

Remarque 4.4.7. La suite spectrale ${}^{q}_{II}E^r$ dépend du représentant du complexe de poids considéré, contrairement à la suite spectrale ${}^{q}_{I}E^r$.

Si d est la dimension de X, les termes de la ligne d de la suite spectrale de poids équivariante réindexée s'expriment alors comme la cohomologie du groupe G à valeurs dans l'unique terme non nul de la ligne d de la suite spectrale de poids (réindexée) non-équivariante :

Corollaire 4.4.8. *Pour tout p,*

$$ {}^{G}\widetilde{E}^2_{p,d} = H^{-p}\left(G, \widetilde{E}^2_{0,d}\right) $$

Démonstration. On considère la suite spectrale

$$ {}^{d}_{I}E^2_{\alpha,\beta} = H^{-\alpha}\left(G, \widetilde{E}^2_{\beta,d}\right) \Rightarrow H_{\alpha+\beta}\left(G, \widetilde{E}^1_{*,d}\right) = {}^{G}\widetilde{E}^2_{\alpha+\beta,d}, $$

qui converge au niveau ${}^{d}_{I}E^2$ car $\widetilde{E}^2_{\beta,d} = 0$ si $\beta \neq 0$. Ainsi,

$$ {}^{G}\widetilde{E}^2_{p,d} = \bigoplus_{\alpha+\beta=p} {}^{d}_{I}E^2_{\alpha,\beta} = H^{-p}\left(G, \widetilde{E}^2_{0,d}\right). $$

□

On constate alors que, a priori, la ligne d de la suite spectrale de poids équivariante (réindexée) possède non pas un mais une infinité de termes non nuls, à savoir tous les termes d'abscisse $p \leq 0$.

Cela concerne en fait toutes les lignes de la suite spectrale, nous informant que la suite spectrale de poids équivariante n'est, en général, pas bornée à gauche :

Corollaire 4.4.9. *Pour tous $r \geq 2$, p, q, si ${}^{G}\widetilde{E}^r_{p,q} \neq 0$ alors $0 \leq q \leq d$ et $p + q \leq d$.*

Démonstration. Pour tout q, on a la suite spectrale

$$ {}^{q}_{I}E^2_{\alpha,\beta} = H^{-\alpha}\left(G, \widetilde{E}^2_{\beta,q}\right) \Rightarrow H_{\alpha+\beta}\left(G, \widetilde{E}^1_{*,q}\right) = {}^{G}\widetilde{E}^2_{\alpha+\beta,q}. $$

En particulier, pour tous p, q,

$$ {}^{G}\widetilde{E}^2_{p,q} = \bigoplus_{\alpha+\beta=p} {}^{q}_{I}E^\infty_{\alpha,\beta}. $$

Or, si $q < 0$ ou $q > d$, pour tout β, $\widetilde{E}^2_{\beta,q} = 0$ et donc pour tous α, β, ${}^q_I E^2_{\alpha,\beta} = 0$.

De même, si p et q vérifient $p + q > d$, alors pour tous α, β tels que $\alpha + \beta = p$, on a $\alpha + \beta + q \geq d$, et soit $\beta + q > d$ et alors $\widetilde{E}^2_{\beta,q} = 0$, soit $\beta + q \leq d$ et alors $\alpha > 0$ donc ${}^q_I E^2_{\alpha,\beta} = H^{-\alpha}(G, \widetilde{E}^2_{\beta,q}) = 0$.

Dans ces trois cas, on obtient alors ${}^G\widetilde{E}^2_{p,q} = 0$. □

La filtration par le poids équivariante sur l'homologie équivariante de la variété X reste cependant bornée mais, contrairement à son homologue sur l'homologie de Borel-Moore de X, la borne à gauche est "uniforme", dépendante seulement, a priori, de la dimension d de X :

Corollaire 4.4.10. *La filtration par le poids équivariante sur l'homologie équivariante de X est une filtration bornée*

$$0 = \Omega_{-d-1} H_k(X; G) \subset \Omega_{-d} H_k(X; G) \subset \ldots \subset \Omega_0 H_k(X; G) = H_k(X; G).$$

Démonstration. On a, pour tous p, k,

$$\Omega_p H_k(X; G) = \bigoplus_{q \geq 0} {}^G E^\infty_{p-q,k-p+q} = \bigoplus_{q \geq 0} {}^G\widetilde{E}^\infty_{k+p-q,-(p-q)}.$$

Ainsi, $\Omega_0 H_k(X; G) = \bigoplus_{q \geq 0} {}^G\widetilde{E}^\infty_{k-q,q}$. Or, d'après la proposition précédente, pour $q < 0$, on a ${}^G\widetilde{E}^\infty_{k-q,q} = 0$, et donc

$$\Omega_0 H_k(X; G) = \bigoplus_{q \geq 0} {}^G\widetilde{E}^\infty_{k-q,q} = H_k(X; G).$$

Ensuite pour tout k, on a $\Omega_{-d-1} H_k(X; G) = \bigoplus_{q \geq 0} {}^G\widetilde{E}^\infty_{k-d-1-q,d+1+q}$. Or comme, pour tout $q \geq 0$, $d + 1 + q \geq d + 1$ et donc, d'après la proposition précédente, ${}^G\widetilde{E}^\infty_{k-d-1-q,d+1+q} = 0$, on obtient bien

$$\Omega_{-d-1} H_k(X; G) = 0.$$

□

Remarque 4.4.11. La borne à gauche de la suite spectrale de poids était un ingrédient fondamental pour l'extraction des nombres de Betti virtuels. A cause de la mise en défaut de cette propriété dans le cadre équivariant, la suite exacte longue d'additivité n'est pas finie, et de plus, la condition de compacité-non singularité n'implique pas forcément la dégénérescence de la suite spectrale de poids équivariante à la page 2, comme nous allons le voir au point suivant (4.4.13, 4.3.3).

Exemple 4.4.12. Calcul de la suite spectrale de poids équivariante de la courbe algébrique réelle X d'équation $y^2 = x^2 - x^4$ dans $\mathbb{R}^2$.

1. Action $(x, y) \mapsto (-x, y)$. La suite spectrale de poids (réindexée) de X est donnée à la page $\widetilde{E}^2(X)$ par

$$\begin{array}{cc} \mathbb{Z}_2[X] & \\ \mathbb{Z}_2[\{p_0\}] & \mathbb{Z}_2[X_1] \end{array}$$

où $p_0 = (0,0)$ est l'unique point fixe de X sous l'action, et où X_1 et X_2 sont les deux cycles de dimension 1 de X.

La page ${}^G\widetilde{E}^2(X)$ de la suite spectrale de poids équivariante de X est donnée par la formule

$$ {}^G\widetilde{E}^2_{p,q}(X) = H_p\left(G, \widetilde{E}^1_{*,q}(X)\right). $$

On a

- ${}^G\widetilde{E}^2_{p,1} = H^{-p}\left(G, \widetilde{E}^2_{0,1}\right) = \mathbb{Z}_2[X]$ si $p \leq 0$, 0 sinon.
- Calculons ensuite la suite spectrale de Hochschild-Serre associée au G-complexe $\widetilde{E}^1_{*,0}(X)$. La page 2 s'écrit

$$\begin{array}{ccccc} \cdots & \mathbb{Z}_2[X_1] & \cdots & \mathbb{Z}_2[X_1] & \mathbb{Z}_2[X_1] \\ \cdots & \mathbb{Z}_2[\{p_0\}] & \cdots & \mathbb{Z}_2[\{p_0\}] & \mathbb{Z}_2[\{p_0\}] \end{array}$$

  Les différentielles sont triviales, étant donné que le point p_0 est laissé fixe par l'action, et on a donc

$$ {}^G\widetilde{E}^2_{p,0}(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2[X_1] \text{ si } p = 1, \\ \mathbb{Z}_2[X_1] \oplus \mathbb{Z}_2[\{p_0\}] \text{ si } p \leq 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} $$

La page ${}^G\widetilde{E}^2(X)$ s'écrit donc

$$\begin{array}{cccccccc} \cdots & \mathbb{Z}_2[X] & \cdots & \mathbb{Z}_2[X] & \mathbb{Z}_2[X] & \\ \cdots & \mathbb{Z}_2[X_1] \oplus \mathbb{Z}_2[\{p_0\}] & \cdots & \mathbb{Z}_2[X_1] \oplus \mathbb{Z}_2[\{p_0\}] & \mathbb{Z}_2[X_1] \oplus \mathbb{Z}_2[\{p_0\}] & \mathbb{Z}_2[X_1] \end{array}$$

Or l'image de $[X_1]$ par la différentielle ${}^G\widetilde{d}^2$ est $[X]$ (c'est la classe de l'image de X_1 par $\partial \oplus (1+\sigma)$) et celle de $[\{p_0\}]$ est 0. La page ${}^G\widetilde{E}^3(X)$ est donc

$$\begin{array}{cccccc} \cdots & 0 & \cdots & 0 & \mathbb{Z}_2[X] & \\ \cdots & \mathbb{Z}_2[\{p_0\}] & \cdots & \mathbb{Z}_2[\{p_0\}] & \mathbb{Z}_2[\{p_0\}] & 0 \end{array}$$

La suite spectrale de poids équivariante ${}^G\widetilde{E}(X)$ de X converge alors à la page 3 et on a

$$ \Omega_{-1}H_1(X;G) = \Omega_0 H_1(X;G) = \mathbb{Z}_2[X] $$

et

$$ 0 = \Omega_{-1}H_k(X;G) \subset \Omega_0 H_k(X;G) = \mathbb{Z}_2[\{p_0\}] $$

pour $k \leq 0$.

2. Action $(x,y) \mapsto (x,-y)$. On détermine de la même façon que précédemment la suite spectrale de poids équivariante ${}^G\widetilde{E}(X)$ de X.

   Ici, on a

   - ${}^G\widetilde{E}^2_{p,1} = H^{-p}\left(G, \widetilde{E}^2_{0,1}\right) = \mathbb{Z}_2[X]$ si $p \leq 0$, 0 sinon.

– La suite spectrale de Hochschild-Serre associée au G-complexe $\widetilde{E}^1_{*,0}(X)$ converge également à la page 2 qui s'écrit

$$\begin{array}{cccccc} \cdots & \mathbb{Z}_2[X_1] & \cdots & \mathbb{Z}_2[X_1] & \mathbb{Z}_2[X_1] \\ \cdots & \mathbb{Z}_2[\{p_0\}] & \cdots & \mathbb{Z}_2[\{p_0\}] & \mathbb{Z}_2[\{p_0\}] \end{array}$$

et on a

$${}^G\widetilde{E}^2_{p,0}(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2[X_1] \text{ si } p = 1, \\ \mathbb{Z}_2[X_1] \oplus \mathbb{Z}_2[\{p_0\}] \text{ si } p \leq 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

La page ${}^G\widetilde{E}^2(X)$ s'écrit donc

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \mathbb{Z}_2[X] & \cdots & \mathbb{Z}_2[X] & \mathbb{Z}_2[X] & \\ \cdots & \mathbb{Z}_2[X_1] \oplus \mathbb{Z}_2[\{p_0\}] & \cdots & \mathbb{Z}_2[X_1] \oplus \mathbb{Z}_2[\{p_0\}] & \mathbb{Z}_2[X_1] \oplus \mathbb{Z}_2[\{p_0\}] & \mathbb{Z}_2[X_1] \end{array}$$

L'image de $[X_1]$ par la différentielle ${}^G\widetilde{d}^2$ est 0 (le cycle X_1 est invariant sous l'action), de même pour $[\{p_0\}]$. Autrement dit, la différentielle ${}^G\widetilde{d}^2$ est triviale et la suite spectrale de poids équivariante ${}^G\widetilde{E}(X)$ de X converge alors à la page 2.

On a

$$\mathbb{Z}_2[X] = \Omega_{-1} H_1(X; G) \subset \Omega_0 H_1(X; G) = \mathbb{Z}_2[X_1] \oplus \mathbb{Z}_2[X_2]$$

et

$$\mathbb{Z}_2[X] = \Omega_{-1} H_k(X; G) \subset \Omega_0 H_k(X; G) = \mathbb{Z}_2[X_1] \oplus \mathbb{Z}_2[X_2] \oplus \mathbb{Z}_2[\{p_0\}]$$

pour $k \leq 0$.

4.4.3 Variétés compactes non singulières

Proposition 4.4.13. *Pour X compacte non singulière, la suite spectrale de poids équivariante ${}^G\widetilde{E}$ coïncide, à partir de la page 2, avec la suite spectrale de Hochschild-Serre*

$${}_IE^2_{p,q}(X) = H^{-p}\left(G, H_q(X)\right) \Rightarrow H_{p+q}(X; G)$$

associée à X.

Démonstration. Comme X est compacte et non singulière, on a un quasi-isomorphisme filtré $\Omega C^G_*(X) \to \mathcal{F}^{can} C^G_*(X)$. Or, d'après 4.2.6, la suite spectrale induite par le complexe filtré $\mathcal{F}^{can} C^G_*(X) = \mathcal{F}^{can} L_*\left(C_*(X)\right)$ est isomorphe, à partir de la page 2 (après réindexation), à la suite spectrale de Hochschild-Serre associée au G-complexe $C_*(X)$.

Ainsi, la suite spectrale de poids équivariante réindexée de X (induite par $\Omega C^G_*(X)$) est isomorphe à partir de la page 2 à la suite spectrale de Hochschild-Serre associée à X.

□

Remarque 4.4.14. En particulier, même dans le cas d'une variété compacte non singulière, la suite spectrale de poids équivariante ne converge en général pas à la page 2 (et n'y est pas non plus bornée à gauche) comme on peut le voir sur l'exemple de la sphère munie de l'action antipodale (4.3.3).

4.5 Le cas G d'ordre impair

En général, l'action du groupe G fournit donc un surplus d'informations qui se retrouvent dans la suite spectrale de poids équivariante, compliquant l'appréhension de celle-ci. L'homologie équivariante semble elle-même contenir tant d'informations qu'elle paraît difficile à interpréter (en tout cas géométriquement), sans passer par les suites spectrales qui y convergent.

Cependant, si le groupe G est d'ordre impair, les objets équivariants considérés vont simplement correspondre aux invariants sous l'action induite des objets avec action considérés précédemment. Cela tient au fait que les chaînes, et a fortiori les homologies, considérées sont à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$. En effet, si G est d'ordre impair, l'anneau $\mathbb{Z}_2[G]$ est semi-simple en vertu du théorème de Maschke :

Théorème 4.5.1. ([7] Theorem 2.1.1) *Soient G un groupe fini et k un corps. Alors $k[G]$ est semi-simple si et seulement si la caractéristique de k ne divise pas l'ordre du groupe.*

Or, dans le cas où $k[G]$ est semi-simple, tout $k[G]$-module est à la fois projectif et injectif. En particulier k, muni de son action triviale de G, l'est et une résolution de k par des $k[G]$-modules projectifs est alors

$$... \to 0 \to k \to k \to 0.$$

Ainsi, pour tout $k[G]$-module M, la cohomologie du groupe G à valeurs dans M est donnée par $H^n(G, M) = Hom_{k[G]}(k, M) = M^G$ pour $n = 0$, 0 sinon.

De plus, la condition de semi-simplicité de $k[G]$ est également équivalente au fait que toute suite exacte courte de $k[G]$-modules soit scindée ([7]). En particulier, le foncteur Γ^G qui à un $k[G]$-module associe l'ensemble de ses éléments invariants sous l'action de G est donc exact si la caractéristique du corps k ne divise pas l'ordre de G.

Soit donc G un groupe d'ordre impair. Dans le cas qui nous intéresse, comme la caractéristique du corps $\mathbb{Z}_2$ ne divise pas l'ordre de G, on a pour tout $\mathbb{Z}_2[G]$-module M,

$$H^n(G, M) = \begin{cases} M^G \text{ si } n = 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

De même, le complexe double associé au foncteur L est réduit à une unique colonne non nulle $p = 0$, dans le cas où l'on considère la résolution projective

$$... \to 0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \to 0 :$$

pour K_* un G-complexe,

$$L_*(K_*) = (K_*)^G.$$

Ainsi, pour tout n, l'homologie de G à valeurs dans le G-complexe K_* se réduit à

$$H_n(G, K_*) = H_n(L_*(K_*)) = H_n\left((K_*)^G\right) = (H_n(K_*))^G,$$

car le foncteur Γ^G est exact sur la catégorie des $\mathbb{Z}_2[G]$-modules.

Notons enfin que les suites spectrales ${}_IE$ et ${}_{II}E$ associées à K_* coïncident et convergent au niveau 2 :

$$
{}_IE^2_{p,q} = H^{-p}\left(G, H_q\left(K_*\right)\right) = \begin{cases} \left(H_q(K_*)\right)^G = H_q\left((K_*)^G\right) \text{ si } p = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}
$$

$$
{}_{II}E^2_{p,q} = H_q\left(H^{-p}\left(G, K_*\right)\right) = \begin{cases} H_q\left((K_*)^G\right) = \left(H_q(K_*)\right)^G \text{ si } p = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}
$$

Soit maintenant X une G-variété algébrique réelle. Alors, d'après ce que l'on vient de voir, l'homologie équivariante de X est constituée des classes d'homologie de X invariantes sous l'action de G :

$$
H_k(X;G) = H_k\left(G, C_*(X)\right) = \left(H_k(C_*(X))\right)^G = \left(H_k(X)\right)^G
$$

pour tout k.

De même, la suite spectrale de poids équivariante est obtenue en appliquant le foncteur Γ^G à la suite spectrale de poids avec action. En effet,

$$
\Omega C^G_*(X) = L_*(\mathcal{W}C_*(X)) = (\mathcal{W}C_*(X))^G
$$

et, le foncteur Γ^G étant exact, pour tous r, p, q, on a

$$
{}^GE^r_{p,q} = \left(E^r_{p,q}\right)^G.
$$

En particulier, cela nous permet de cerner les termes non nuls de la suite spectrale de poids équivariante réindexée dans le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,d)$ et $(d,0)$ (si X est de dimension d), et donc de retrouver les nombres de Betti virtuels équivariants dans le cas où le groupe G est d'ordre impair :

Proposition 4.5.2. *Soit G un groupe fini d'ordre impair. Pour toute G-variété algébrique réelle X et pour tout q, le q-ième nombre de Betti virtuel équivariant de X ([12]) est obtenu comme somme alternée sur les dimensions des termes de la ligne q de la suite spectrale de poids équivariante :*

$$
\beta^G_q(X) = \sum_p (-1)^p \dim_{\mathbb{Z}_2} {}^G\widetilde{E}^2_{p,q}.
$$

Démonstration. La suite exacte longue d'additivité pour une inclusion fermée équivariante est dans ce cas finie (les termes d'abscisse $p \leq 0$ sont nuls), d'où l'additivité de la somme alternée si G est d'ordre impair.

De plus, si X est compacte non singulière, ${}^G\widetilde{E}^2_{p,q} = \left(\widetilde{E}^2_{p,q}\right)^G = 0$ si $p \neq 0$ et

$$
{}^G\widetilde{E}^2_{0,q} = \left(\widetilde{E}^2_{0,q}\right)^G = \left(H_q(X)\right)^G = H_q(X;G).
$$

□

Chapitre 5

Réalisation de la filtration par le poids équivariante et invariants additifs

Soit G un groupe fini.

Afin de réaliser le complexe de poids équivariant, il suffit d'appliquer le foncteur L à un complexe filtré qui réalise le complexe de poids avec action.

On va en particulier s'intéresser au complexe filtré réalisé via les filtrations géométrique et Nash-constructible, qui coïncident sur les G-variétés algébriques réelles. En effet, cela nous permettra de construire des invariants additifs sur les G-variétés algébriques réelles dont différents indices tendent à penser qu'ils pourraient réaliser, notamment dans le cas $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, les nombres de Betti virtuels équivariants que G. Fichou a défini dans [12]. Ce sont les uniques invariants additifs définis sur la catégorie des G-variétés algébriques réelles coïncidant avec les dimensions des groupes d'homologie équivariante sur les variétés compactes non singulières.

5.1 Les filtrations géométrique et Nash-constructible équivariantes

On a vu que le foncteur qui associait à une G-variété algébrique réelle X son complexe des chaînes semi-algébriques à supports fermés muni de la filtration géométrique $\mathcal{G}C_*(X)$ sur lequel G agit par fonctorialité réalise le complexe de poids avec action (3.2.5). En le composant avec le foncteur L qui préserve les quasi-isomorphismes filtrés, on obtient alors un foncteur qui réalise le complexe de poids équivariant (et qui est défini au niveau des chaînes, en fixant une résolution projective de $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$ sur $\mathbb{Z}[G]$, resp. $\mathbb{Z}_2[G]$) :

Définition et Proposition 5.1.1. *Pour X une G-variété algébrique réelle, on note $\Lambda C_*^G(X)$ le complexe $L(\mathcal{G}C_*(X))$ de $\mathcal{C}_-$, et on le nomme complexe géométrique équivariant de X.*

Le foncteur

$$\Lambda C_*^G : \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_- \ ; \ X \mapsto \Lambda C_*^G(X)$$

obtenu ainsi réalise le complexe de poids équivariant (dans $H \circ \mathcal{C}_-$).

Remarque 5.1.2. On a vu (2.6.12) que les foncteurs $\mathcal{G}C_*$ et $\mathcal{N}C_*$ coïncidaient sur $\mathbf{Sch}_c(\mathbb{R})$. Dans la suite, on privilégiera la définition de cette réalisation du complexe de poids par les fonctions Nash-constructibles.

La réalisation du complexe de poids équivariant (dès le niveau des chaînes) par cette filtration va nous permettre de déceler une additivité que l'on ne parvenait pas à lire sur la suite spectrale de poids équivariante.

En effet, le caractère scindé de la suite exacte courte d'additivité (au niveau des chaînes) de la filtration Nash-constructible induit un invariant additif obtenu à partir de l'une des deux suites spectrales qui convergent vers les termes de la page 2 de la suite spectrale de poids équivariante :

Proposition 5.1.3. *Soit $Y \subset X$ une inclusion fermée équivariante dans $\mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$. Pour tout q et tout i, on a une suite exacte longue finie*

$$\cdots \to {}_{II}^{q}E^2_{i,j}(Y) \to {}_{II}^{q}E^2_{i,j}(X) \to {}_{II}^{q}E^2_{i,j}(X \setminus Y) \to {}_{II}^{q}E^2_{i,j-1}(Y) \to \cdots,$$

où ${}_{II}^{q}E^2_{i,j} = H_j\left(H^{-i}\left(G, \widetilde{E}^1_{*,q}\right)\right)$ est le terme ${}_{II}^{q}E^2$ de la suite spectrale (associée à la réalisation du complexe de poids par la filtration Nash-constructible) qui converge vers la ligne q des termes ${}^G\widetilde{E}^2$ de la suite spectrale de poids équivariante.

Démonstration. Les suites exactes courtes

$$0 \to \mathcal{N}_pC_k(Y) \to \mathcal{N}_pC_k(X) \to \mathcal{N}_pC_k(X \setminus Y) \to 0$$

sont scindées par le morphisme d'adhérence $c \in \mathcal{N}_pC_k(X \setminus Y) \mapsto \overline{c} \in \mathcal{N}_pC_k(X)$.

Elles induisent alors l'exactitude et le caractère scindé des suites

$$0 \to E^0_{p,q}(Y) \to E^0_{p,q}(X) \to E^0_{p,q}(X \setminus Y) \to 0.$$

De plus, tous les morphismes considérés sont équivariants par rapport aux actions induites de G.

Fixons p et q. La suite exacte précédente induit alors une suite exacte longue de cohomologie du groupe G :

$$\begin{aligned} 0 \to \left(E^0_{p,q}(Y)\right)^G \to \left(E^0_{p,q}(X)\right)^G \to \left(E^0_{p,q}(X \setminus Y)\right)^G \to \\ \to H^1\left(G, E^0_{p,q}(Y)\right) \to H^1\left(G, E^0_{p,q}(X)\right) \to H^1\left(G, E^0_{p,q}(X \setminus Y)\right) \to \dots \end{aligned}$$

Le morphisme scindé $E^0_{p,q}(X) \to E^0_{p,q}(X \setminus Y)$ induit des morphismes scindés $H^k\left(G, E^0_{p,q}(X)\right) \to H^k\left(G, E^0_{p,q}(X \setminus Y)\right)$ pour tout k, qui sont en particulier surjectifs. Pour $k \geq 0$ fixé, le noyau du morphisme $H^{k+1}\left(G, E^0_{p,q}(Y)\right) \to H^{k+1}\left(G, E^0_{p,q}(X)\right)$, qui est l'image de $H^k\left(G, E^0_{p,q}(X \setminus Y)\right) \to H^{k+1}\left(G, E^0_{p,q}(Y)\right)$, est donc réduit à 0.

On obtient alors des suites exactes courtes

$$0 \to H^k\left(G, E^0_{p,q}(Y)\right) \to H^k\left(G, E^0_{p,q}(X)\right) \to H^k\left(G, E^0_{p,q}(X \setminus Y)\right) \to 0$$

pour tout k.

Ainsi, pour tout k, en appliquant le foncteur $H^k(G, \cdot)$ aux suites exactes courtes de complexes

$$0 \to E^0_{p,*}(Y) \to E^0_{p,*}(X) \to E^0_{p,*}(X - Y) \to 0,$$

on obtient de nouvelles suites exactes courtes

$$0 \to H^k\left(G, E^0_{p,*}(Y)\right) \to H^k\left(G, E^0_{p,*}(X)\right) \to H^k\left(G, E^0_{p,*}(X \setminus Y)\right) \to 0.$$

En particulier, fixons q et i et rappelons que $\widetilde{E}^1_{*,q} = E^0_{-q,*+2q}$. Alors, on a la suite exacte courte

$$0 \to H^{-i}\left(G, E^0_{-q,*+2q}(Y)\right) \to H^{-i}\left(G, E^0_{-q,*+2q}(X)\right) \to H^{-i}\left(G, E^0_{-q,*+2q}(X \setminus Y)\right) \to 0,$$

qui induit la suite exacte longue d'homologie

$$\ldots \to H_j\left(H^{-i}\left(G, E^0_{-q,*+2q}(Y)\right)\right) \to H_j\left(H^{-i}\left(G, E^0_{-q,*+2q}(X)\right)\right) \to$$

$$\to H_j\left(H^{-i}\left(G, E^0_{-q,*+2q}(X \setminus Y)\right)\right) \to H_{j-1}\left(H^{-i}\left(G, E^0_{-q,*+2q}(Y)\right)\right) \to \ldots,$$

i.e. la suite exacte longue

$$\ldots \to {}^{q}_{II}E^2_{i,j}(Y) \to {}^{q}_{II}E^2_{i,j}(X) \to {}^{q}_{II}E^2_{i,j}(X \setminus Y) \to {}^{q}_{II}E^2_{i,j-1}(Y) \to \ldots$$

□

Ces suites exactes longues (finies car les complexes $\widetilde{E}^1_{*,q}$ sont bornés) induisent des invariants additifs.

Remarque 5.1.4. Le fait que les suites exactes courtes

$$0 \to \mathcal{N}_p C_k(Y) \to \mathcal{N}_p C_k(X) \to \mathcal{N}_p C_k(X \setminus Y) \to 0$$

soient scindées par un morphisme équivariant induit de la même façon des suites exactes courtes

$$0 \to H^n\left(G, \mathcal{N}_p C_k(Y)\right) \to H^n\left(G, \mathcal{N}_p C_k(X)\right) \to H^n\left(G, \mathcal{N}_p C_k(X \setminus Y)\right) \to 0.$$

Les suites exactes courtes de complexes associées induisent alors des suites exactes longues d'homologie.

En particulier, on obtient la suite exacte longue (finie) d'homologie des paires $\left((\mathcal{N}_p C_*)^G, (\mathcal{N}_p C_*)^G\right)$:

$$H_k\left(\frac{(\mathcal{N}_p C_*(Y))^G}{(\mathcal{N}_{p-1} C_*(Y))^G}\right) \to H_k\left(\frac{(\mathcal{N}_p C_*(X))^G}{(\mathcal{N}_{p-1} C_*(X))^G}\right) \to H_k\left(\frac{(\mathcal{N}_p C_*(X \setminus Y))^G}{(\mathcal{N}_{p-1} C_*(X \setminus Y))^G}\right) \to H_{k-1}\left(\frac{(\mathcal{N}_p C_*(Y))^G}{(\mathcal{N}_{p-1} C_*(Y))^G}\right)$$

5.2 Invariants additifs et coïncidence avec les nombres de Betti virtuels équivariants

5.2.1 Invariants additifs

En prenant appui sur les suites exactes longues (finies) que l'on a obtenues, on définit des invariants ${}^{q}B_i$, pour tout q et tout i. Puis, on somme ceux-ci sur les diagonales $q+i=k$ pour obtenir de nouveaux invariants additifs B_k^G, pour tout k.

Définition 5.2.1. *Pour toute G-variété algébrique réelle X, on pose pour tout q et tout i*

$$ {}^{q}B_i(X) := \sum_j (-1)^j \dim_{\mathbb{Z}_2} {}^{q}_{II}E^2_{i,j}(X). $$

On pose ensuite, pour tout k,

$$ B_k^G(X) := \sum_{q+i=k} {}^{q}B_i(X). $$

Remarque 5.2.2. On peut effectivement définir les invariants ${}^{q}B_i$ et B_k^G dans le cas où les différents $\mathbb{Z}_2$-espaces vectoriels ${}^{q}_{II}E^2_{i,j}(X) = H_j\left(H^{-i}\left(G, \widetilde{E}^1_{*,q}(X)\right)\right)$ sont tous de dimension finie. Un travail supplémentaire important sera nécessaire pour montrer que cela est effectivement bien le cas pour toute G-variété algébrique réelle X.

Cette prochaine étape semble aller de pair avec la compréhension des complexes $(\mathcal{N}_\alpha C_*(X))^G$ et de leur homologie, essentielle pour déterminer si les invariants B_k^G forment de nouveaux invariants, ou s'ils sont égaux aux nombres de Betti virtuels équivariants. Cette étude devrait cependant nécessiter des considérations plus géométriques et l'utilisation d'outils et/ou de techniques équivariants très fins sur les chaînes semi-algébriques.

Dans la suite, on se placera ainsi dans des cas où les espaces vectoriels ${}^{q}_{II}E^2_{i,j}$ sont de dimension finie, et où les invariants ${}^{q}B_i$ et B_k^G sont donc bien définis.

Théorème 5.2.3. *Les invariants ${}^{q}B_i(\cdot)$ et donc les invariants $B_k^G(\cdot)$ sont additifs sur les G-variétés algébriques réelles où ils sont définis.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition 5.1.3. □

Remarque 5.2.4. Le caractère additif, voire la finitude de ces invariants, dépend fortement de la réalisation du complexe de poids que l'on a considérée, à savoir la filtration Nash-constructible.

Exemple 5.2.5.
1. Action $(x,y) \mapsto (-x,y)$ sur la courbe algébrique réelle X d'équation $y^2 = x^2 - x^4$ dans $\mathbb{R}^2$.

   La page $\widetilde{E}^1(X)$ de la suite spectrale de poids de X, calculée à partir de la filtration Nash-constructible, est donnée par

$$ \widetilde{E}^1_{p,q}(X) = \frac{\mathcal{N}_{-q}C_{p+q}}{\mathcal{N}_{-q-1}C_{p+q}} $$

et s'écrit donc

$$\begin{array}{ll} \mathcal{N}_{-1}C_1(X) & \\ \quad C_0(X) & \quad C_1(X)/\mathcal{N}_{-1}C_1(X) \end{array}$$

En appliquant le foncteur $H^{-i}(G,\cdot)$, on obtient alors le diagramme

$$\begin{array}{ll} H^{-i}\left(G,\mathcal{N}_{-1}C_1(X)\right) & \\ \quad H^{-i}(G,C_0(X)) & \quad H^{-i}\left(G,C_1(X)/\mathcal{N}_{-1}C_1(X)\right) \end{array}$$

Or,
- Pour tout $i \leq 0$, $H^{-i}\left(G,\mathcal{N}_{-1}C_1(X)\right) = \mathcal{N}_{-1}C_1(X) = \mathbb{Z}_2[X]$.
- Les éléments de $\left(C_1(X)/\mathcal{N}_{-1}C_1(X)\right)^G$ sont représentés soit par des chaînes invariantes sous l'action (et qui peuvent alors s'écrire comme l'image par $1+\sigma$ d'une chaîne de dimension 1), soit par des chaînes dont l'image par $1+\sigma$ est $[X]$. En particulier, pour $i < 0$, les seuls éléments non nuls de $H^{-i}\left(G,C_1(X)/\mathcal{N}_{-1}C_1(X)\right)$ sont ceux représentés par ce second type de chaîne.
- Pour $i < 0$, $H^{-i}(G,C_0(X)) = \mathbb{Z}_2[\{p_0\}]$ (où $p_0 = (0,0)$ est l'unique point invariant de X sous l'action).

Ainsi, comme ${}^{q}_{II}E^2_{i,j}(X) = H_j\left(H^{-i}\left(G,\widetilde{E}^1_{*,q}(X)\right)\right)$, on a
- ${}^{0}_{II}E^2_{0,1} = ker\ \left(\left(C_1(X)/\mathcal{N}_{-1}C_1(X)\right)^G \to \left(C_0(X)\right)^G\right) = \mathbb{Z}_2[X_1]$ (où X_1 et X_2 sont les cycles engendrant les cycles de dimension 1 de X), et ${}^{0}_{II}E^2_{0,0} = \mathbb{Z}_2[\{p_0\}]$ (deux points de X échangés sous l'action peuvent être reliés par une 1-chaîne invariante de X).
- Pour $i < 0$, ${}^{0}_{II}E^2_{i,1} = ker\ \left(H^{-i}\left(G,C_1(X)/\mathcal{N}_{-1}C_1(X)\right) \to H^{-i}(G,C_0(X))\right) = \mathbb{Z}_2[X_1]$ (dans le quotient $H^{-i}\left(G,C_1(X)/\mathcal{N}_{-1}C_1(X)\right)$, une chaîne et son image sous σ représentent le même élément) et ${}^{0}_{II}E^2_{i,0} = \mathbb{Z}_2[\{p_0\}]$.

Au total, on a donc

$$\dim_{\mathbb{Z}_2} {}^{q}_{II}E^2_{i,j}(X) = \begin{cases} 1 \text{ si } q=1,\ i \leq 0 \text{ et } j=0, \\ 1 \text{ si } q=0,\ i\leq 0,\ j=0,1. \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On peut alors calculer les invariants ${}^{q}B_i(X) = \sum_j (-1)^j \dim_{\mathbb{Z}_2} {}^{q}_{II}E^2_{i,j}(X)$ et $B^G_k(X) = \sum_{q+i=k} {}^{q}B_i(X)$ de X. On a

$${}^{q}B_i(X) = \begin{cases} 0 \text{ si } q=0, \\ 1 \text{ si } q=1 \text{ et } i\leq 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

et donc

$$B^G_k(X) = \begin{cases} 1 \text{ si } k \leq 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

2. Action $(x,y) \mapsto (x,-y)$ sur la même variété X. De la même façon que précédemment, on calcule les invariants à partir du diagramme

$$H^{-i}(G, \mathcal{N}_{-1}C_1(X))$$
$$H^{-i}(G, C_0(X)) \qquad H^{-i}(G, C_1(X)/\mathcal{N}_{-1}C_1(X))$$

Ici cependant, trois points p_1, p_2 et p_3 sont invariants sous cette action, et on a donc en particulier $H^{-i}(G, C_0(X)) = \mathbb{Z}_2[\{p_1, p_2, p_3\}]$ pour $i < 0$.

On a alors
- ${}^{0}_{II}E^2_{0,1} = \mathbb{Z}_2[X_1]$, et ${}^{0}_{II}E^2_{0,0} = \mathbb{Z}_2[p_1] \oplus \mathbb{Z}_2[p_2]$ (en considérant p_1 comme le point à l'origine).
- Pour $i < 0$, ${}^{0}_{II}E^2_{i,1} = 0$ et ${}^{0}_{II}E^2_{i,0} = \mathbb{Z}_2[p_1] \oplus \mathbb{Z}_2[p_2]$.

Au total,

$$\dim_{\mathbb{Z}_2} {}^{q}_{II}E^2_{i,j}(X) = \begin{cases} 1 \text{ si } q = 1,\ i \leq 0 \text{ et } j = 0, \\ 2 \text{ si } q = 0,\ i \leq 0,\ j = 0, \\ 1 \text{ si } q = 0,\ i = 0,\ j = 1, \\ 0 \text{ si } q = 0,\ i < 0,\ j = 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Ainsi,

$${}^{q}B_i(X) = \begin{cases} 1 \text{ si } q = 1 \text{ et } i \leq 0, \\ 1 \text{ si } q = 0 \text{ et } i = 0, \\ 2 \text{ si } q = 0 \text{ et } i < 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

et donc

$$B^G_k(X) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 1, \\ 2 \text{ si } k = 0, \\ 3 \text{ si } k < 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

3. Action $(x,y) \mapsto (x,-y)$ sur le cercle $X = S^1$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$ dans $\mathbb{R}^2$.

   On a ici
   - Pour tout $i \leq 0$, $H^{-i}(G, \mathcal{N}_{-1}C_1(X)) = \mathcal{N}_{-1}C_1(X) = \mathbb{Z}_2[X]$.
   - Les éléments de $(C_1(X)/\mathcal{N}_{-1}C_1(X))^G$ sont représentés soit par des chaînes invariantes sous l'action (et qui peuvent alors s'écrire comme l'image par $1+\sigma$ d'une chaîne de dimension 1), soit par des chaînes dont l'image par $1+\sigma$ est $[X]$.
   - Pour $i < 0$, $H^{-i}(G, C_0(X)) = \mathbb{Z}_2[\{p_1, p_2\}]$ (où p_1, p_2 sont les deux points invariants de X sous l'action).

   Donc

– ${}^{0}_{II}E^2_{0,1} = 0$ (le seul 1-cycle du cercle X est $[X]$), et ${}^{0}_{II}E^2_{0,0} = \mathbb{Z}_2[\{p_1\}]$ (un point et son image par σ peuvent être reliés par une chaîne invariante de dimension 1, et les points p_1 et p_2 sont les deux points du bord du demi-cercle dont l'image par $1+\sigma$ est $[X]$).
– Pour $i < 0$, ${}^{0}_{II}E^2_{i,1} = 0$ et ${}^{0}_{II}E^2_{i,0} = \mathbb{Z}_2[\{p_1\}]$.

Au total,

$$\dim_{\mathbb{Z}_2} {}^{q}_{II}E^2_{i,j}(X) = \begin{cases} 1 \text{ si } q = 1,\ i \leq 0 \text{ et } j = 0, \\ 1 \text{ si } q = 0,\ i \leq 0,\ j = 0, \\ 0 \text{ si } q = 0,\ i \leq 0,\ j = 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Ainsi,

$${}^{q}B_i(X) = \begin{cases} 1 \text{ si } q = 1 \text{ et } i \leq 0, \\ 1 \text{ si } q = 0 \text{ et } i \leq 0, \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

et

$$B^G_k(X) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 1, \\ 2 \text{ si } k \leq 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

4. Action $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ sur le même cercle X.
   Une différence notable avec l'action précédente est que, comme la symétrie centrale est une action libre, on a $H^{-i}(G, C_0(X)) = 0$ pour $i < 0$.
   On a alors
   – ${}^{0}_{II}E^2_{0,1} = 0$, et ${}^{0}_{II}E^2_{0,0} = 0$ (deux points échangés sous l'action peuvent être reliés par une 1-chaîne dont l'image par $1+\sigma$ est $[X]$).
   – Pour $i < 0$, ${}^{0}_{II}E^2_{i,1} = [X_1]$, où X_1 est un demi-cercle dans X, et ${}^{0}_{II}E^2_{i,0} = 0$,
   Ainsi,

$$\dim_{\mathbb{Z}_2} {}^{q}_{II}E^2_{i,j}(X) = \begin{cases} 1 \text{ si } q = 1,\ i \leq 0 \text{ et } j = 0, \\ 0 \text{ si } q = 0,\ i \leq 0,\ j = 0, \\ 0 \text{ si } q = 0,\ i = 0,\ j = 1, \\ 1 \text{ si } q = 0,\ i < 0,\ j = 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

   Donc

$${}^{q}B_i(X) = \begin{cases} 0 \text{ si } q = 0 \text{ et } i = 0, \\ -1 \text{ si } q = 0 \text{ et } i < 0, \\ 1 \text{ si } q = 1 \text{ et } i \leq 0, \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

   et

$$B^G_k(X) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 0, 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Dans l'optique de comprendre les invariants B_k^G, ainsi que de tester s'ils coïncident avec les nombres de Betti équivariants (i.e. les dimensions des espaces d'homologie équivariante) s'ils sont appliqués à des G-variétés algébriques réelles compactes non singulières, on va chacun les réaliser comme caractéristique d'Euler (lorsque cela est bien défini) d'une suite spectrale.

Plus précisément, cette suite spectrale sera l'une des deux construites à partir d'un complexe double ${}^k\widehat{C}$, construit lui à partir de suites exactes courtes induites naturellement par la filtration $\mathcal{N}$ et des suites exactes longues alors induites par la cohomologie du groupe G.

5.2.2 Le double complexe $\widehat{C}$ et la suite spectrale $\widehat{E}$

Dans un premier temps, on construit le complexe double ${}^k\widehat{C}$ dans un cadre plus général : on considère un complexe filtré borné quelconque, ainsi que le foncteur Ext dont la cohomologie du groupe G est un cas particulier.

On se place dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{Z}_2$. Soient $M \in \mathcal{A}$ et K_* un complexe (de chaînes) borné dans $\mathcal{A}$ muni d'une filtration croissante bornée F. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on construit un complexe double

$$\left(Ext_{\mathcal{A}}^{-k-\alpha}\left(M, \frac{F_\alpha K_\beta}{F_{\alpha-1}K_\beta}\right)\right)_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$$

(décroissant en les indices α et β).

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}$, la différentielle $\frac{F_\alpha K_\beta}{F_{\alpha-1}K_\beta} \to \frac{F_\alpha K_{\beta-1}}{F_{\alpha-1}K_{\beta-1}}$ induit, par fonctorialité de $Ext_{\mathcal{A}}^{-k-\alpha}(M,\cdot)$, la différentielle

$$d^1 : Ext_{\mathcal{A}}^{-k-\alpha}\left(M, \frac{F_\alpha K_\beta}{F_{\alpha-1}K_\beta}\right) \longrightarrow Ext_{\mathcal{A}}^{-k-\alpha}\left(M, \frac{F_\alpha K_{\beta-1}}{F_{\alpha-1}K_{\beta-1}}\right).$$

Pour tous α, β, on a une suite exacte courte

$$0 \to F_{\alpha-1}K_\beta \to F_\alpha K_\beta \to \frac{F_\alpha K_\beta}{F_{\alpha-1}K_\beta} \to 0$$

qui induit une suite exacte longue (4.1.9)

$$\cdots \to Ext_{\mathcal{A}}^{-k-\alpha}(M, F_{\alpha-1}K_\beta) \to Ext_{\mathcal{A}}^{-k-\alpha}(M, F_\alpha K_\beta) \to Ext_{\mathcal{A}}^{-k-\alpha}\left(M, \frac{F_\alpha K_\beta}{F_{\alpha-1}K_\beta}\right) \to$$

$$\to Ext_{\mathcal{A}}^{-k-(\alpha-1)}(M, F_{\alpha-1}K_\beta) \to \cdots$$

On note alors

$$d^0 : Ext_{\mathcal{A}}^{-k-\alpha}\left(M, \frac{F_\alpha K_\beta}{F_{\alpha-1}K_\beta}\right) \to Ext_{\mathcal{A}}^{-k-(\alpha-1)}\left(M, \frac{F_{\alpha-1}K_\beta}{F_{\alpha-2}K_\beta}\right)$$

la composition de morphismes suivante

$$Ext_{\mathcal{A}}^{k-\alpha}\left(M, \frac{F_\alpha K_\beta}{F_{\alpha-1}K_\beta}\right) \to Ext_{\mathcal{A}}^{k-(\alpha-1)}(M, F_{\alpha-1}K_\beta) \to Ext_{\mathcal{A}}^{k-(\alpha-1)}\left(M, \frac{F_{\alpha-1}K_\beta}{F_{\alpha-2}K_\beta}\right)$$

fournis par les suites exactes longues ci-dessus.

On obtient alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
{} \arrow[r] & Ext_{\mathcal{A}}^{-k-(\alpha+1)}\left(M, \frac{F_{\alpha+1}K_{\beta+1}}{F_{\alpha}K_{\beta+1}}\right) \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "d^1"] & Ext_{\mathcal{A}}^{-k-\alpha}\left(M, \frac{F_{\alpha}K_{\beta+1}}{F_{\alpha-1}K_{\beta+1}}\right) \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "d^1"] & Ext_{\mathcal{A}}^{-k-(\alpha-1)}\left(M, \frac{F_{\alpha-1}K_{\beta+1}}{F_{\alpha-2}K_{\beta+1}}\right) \arrow[r] \arrow[d, "d^1"] & {} \\
{} \arrow[r] & Ext_{\mathcal{A}}^{-k-(\alpha+1)}\left(M, \frac{F_{\alpha+1}K_{\beta}}{F_{\alpha}K_{\beta}}\right) \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "d^1"] & Ext_{\mathcal{A}}^{-k-\alpha}\left(M, \frac{F_{\alpha}K_{\beta}}{F_{\alpha-1}K_{\beta}}\right) \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "d^1"] & Ext_{\mathcal{A}}^{-k-(\alpha-1)}\left(M, \frac{F_{\alpha-1}K_{\beta}}{F_{\alpha-2}K_{\beta}}\right) \arrow[r] \arrow[d, "d^1"] & {} \\
{} \arrow[r] & Ext_{\mathcal{A}}^{-k-(\alpha+1)}\left(M, \frac{F_{\alpha+1}K_{\beta-1}}{F_{\alpha}K_{\beta-1}}\right) \arrow[r, "d^0"] \arrow[d] & Ext_{\mathcal{A}}^{-k-\alpha}\left(M, \frac{F_{\alpha}K_{\beta-1}}{F_{\alpha-1}K_{\beta-1}}\right) \arrow[r, "d^0"] \arrow[d] & Ext_{\mathcal{A}}^{-k-(\alpha-1)}\left(M, \frac{F_{\alpha-1}K_{\beta-1}}{F_{\alpha-2}K_{\beta-1}}\right) \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

Les lignes verticales de ce diagramme sont bien des complexes : on a $d^1 \circ d^1 = 0$ par fonctorialité de $Ext^n_{\mathcal{A}}(M, \cdot)$.

Les lignes horizontales sont également des complexes. On a en effet $d^0 \circ d^0 = 0$ en vertu du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
Ext_{\mathcal{A}}^{-k-(\alpha-1)}\left(M, F_{\alpha-1}K_{\beta}\right) \arrow[r] & Ext_{\mathcal{A}}^{-k-(\alpha-1)}\left(M, \frac{F_{\alpha-1}K_{\beta}}{F_{\alpha-2}K_{\beta}}\right) \\
Ext_{\mathcal{A}}^{-k-\alpha}\left(M, \frac{F_{\alpha}K_{\beta}}{F_{\alpha-1}K_{\beta}}\right) \arrow[u] \arrow[ur, "d^0"] & \\
Ext_{\mathcal{A}}^{-k-\alpha}\left(M, F_{\alpha}K_{\beta}\right) \arrow[u] & Ext_{\mathcal{A}}^{-k-(\alpha+1)}\left(M, \frac{F_{\alpha+1}K_{\beta}}{F_{\alpha}K_{\beta}}\right) \arrow[l] \arrow[ul, "d^0"']
\end{tikzcd}$$

qui est commutatif par définition, et dont la partie de gauche est issue d'une suite exacte.

Enfin, les différentielles d^1 et d^0 du diagramme double commutent, en vertu du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
Ext_{\mathcal{A}}^{-k-\alpha}\left(M, \frac{F_\alpha K_\beta}{F_{\alpha-1}K_\beta}\right) \arrow[rr, "d^0"] \arrow[dr] \arrow[ddd, "d^1"'] & & Ext_{\mathcal{A}}^{-k-(\alpha-1)}\left(M, \frac{F_{\alpha-1} K_\beta}{F_{\alpha-2}K_\beta}\right) \arrow[ddd, "d^1"] \\
& Ext_{\mathcal{A}}^{-k-(\alpha-1)}\left(M, F_{\alpha-1}K_\beta\right) \arrow[ur] \arrow[d] & \\
& Ext_{\mathcal{A}}^{-k-(\alpha-1)}\left(M, F_{\alpha-1}K_{\beta-1}\right) \arrow[dr] & \\
Ext_{\mathcal{A}}^{-k-\alpha}\left(M, \frac{F_\alpha K_{\beta-1}}{F_{\alpha-1}K_{\beta-1}}\right) \arrow[ur] \arrow[rr, "d^0"] & & Ext_{\mathcal{A}}^{-k-(\alpha-1)}\left(M, \frac{F_{\alpha-1} K_{\beta-1}}{F_{\alpha-2}K_{\beta-1}}\right)
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme est commutatif car tous ceux qui le composent le sont : ceux sur les côtés le sont par la propriété de naturalité de la suite exacte longue induite par $Ext_{\mathcal{A}}(M, \cdot)$ (4.1.9), et ceux en haut et en bas le sont par définition de la différentielle d^0.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note ${}^k\widehat{C}(M, FK_*)$ le complexe double

$$\left(Ext_{\mathcal{A}}^{k-\alpha}\left(M, \frac{F_\alpha K_\beta}{F_{\alpha-1}K_\beta}\right)\right)_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$$

ainsi obtenu.

Comme tout complexe double, il induit deux suites spectrales qui convergent (le diagramme est borné verticalement et horizontalement, car le complexe K_* et sa filtration F sont bornés : [23] Theorem 2.15) vers l'homologie du complexe total associé.

Si l'on se place sur la catégorie abélienne $\mathcal{A}$ des $\mathbb{Z}_2[G]$-modules et que l'on considère $M = \mathbb{Z}_2$ et $FK_* = \mathcal{N}C_*(X)$ (avec X une G-variété algébrique réelle), on obtient ainsi, pour tout k, le complexe double ${}^k\widehat{C}(\mathbb{Z}_2, \mathcal{N}C_*(X))$, que l'on note plus simplement ${}^k\widehat{C}(X)$, avec

$${}^k\widehat{C}_{\alpha,\beta}(X) := H^{-k-\alpha}\left(G, \frac{\mathcal{N}_\alpha C_\beta(X)}{\mathcal{N}_{\alpha-1}C_\beta(X)}\right).$$

Si l'on considère alors ${}^k_{II}\widehat{E}$ la deuxième suite spectrale induite

$${}^k_{II}\widehat{E}^1_{\alpha,\beta} = H_\beta\left(H^{-k-\alpha}\left(G, \frac{\mathcal{N}_\alpha C_*(X)}{\mathcal{N}_{\alpha-1}C_*(X)}\right)\right),$$

on a, lorsque cela est bien défini i.e. lorsque les termes ${}^k_{II}\widehat{E}^1_{\alpha,\beta}$ sont de dimension finie,

$$\chi\left({}^k_{II}\widehat{E}^1\right) = B_k^G(X).$$

En effet, dans ce cas, pour tout q,

$$\begin{aligned}
{}^{q}B_i &= \sum_j (-1)^j \dim_{\mathbb{Z}_2} {}^{q}_{II}E^2_{i,j}(X) \\
&= \chi\left(H_*\left(H^{-i}\left(G, \frac{\mathcal{N}_{-q}C_{*+q}}{\mathcal{N}_{-q-1}C_{*+q}}\right)\right)\right) \\
&= (-1)^q \chi\left(H_*\left(H^{-i}\left(G, \frac{\mathcal{N}_{-q}C_{*}}{\mathcal{N}_{-q-1}C_{*}}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
B^G_k(X) &= \sum_{q+i=k} {}^{q}B_i \\
&= \sum_{q+i=k} (-1)^q \chi\left(H_*\left(H^{-i}\left(G, \frac{\mathcal{N}_{-q}C_{*}}{\mathcal{N}_{-q-1}C_{*}}\right)\right)\right) \\
&= \sum_{\alpha} (-1)^\alpha \chi\left(H_*\left(H^{-k-\alpha}\left(G, \frac{\mathcal{N}_{\alpha}C_{*}}{\mathcal{N}_{\alpha-1}C_{*}}\right)\right)\right) \\
&= \chi\left({}^{k}_{II}\widehat{E}^1\right)
\end{aligned}$$

L'intérêt d'une telle réalisation des invariants B^G_k est que la caractéristique d'Euler d'une suite spectrale ne dépend pas de la page sur laquelle on la calcule (à partir de la page où cette quantité est bien définie). Dans notre cas, elle est en particulier égale à la caractéristique d'Euler de l'homologie du complexe total associé à ${}^{k}\widehat{C}$, vers laquelle cette suite spectrale converge. Ce qui est également le cas de l'autre suite spectrale induite par ce complexe double.

Ainsi, on montre que, lorsque cela est bien défini, on a également, pour tout k,

$$B_k = \chi\left({}^{k}_{I}\widehat{E}\right),$$

où ${}^{k}_{I}\widehat{E}$ est la première suite spectrale induite par le complexe double ${}^{k}\widehat{C}$.

Dans le point suivant 5.2.3, on s'intéresse à l'étude des complexes doubles ${}^{k}\widehat{C}(X)$ et des suites spectrales induites, quand X est une variété algébrique munie d'une involution algébrique.

5.2.3 Etude pour $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

On s'intéresse au cas particulier $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On a en effet déjà pu constater dans divers exemples (4.4.12, 4.3.3) que même l'action du plus petit groupe non trivial enrichit considérablement les structures des G-variétés algébriques réelles. Cela se traduit dans notre étude par une plus grande difficulté à extraire le surplus d'information de la suite spectrale de poids équivariante, a fortiori des invariants additifs qui, en analogie avec le cadre sans action, coïncideraient avec les nombres de Betti équivariants sur les G-variétés compactes non singulières. Les nouvelles suites spectrales que l'on vient de mettre à jour, et qui lui sont liées, sont ainsi un nouvel outil pour tenter de déméler et mieux comprendre toutes ces informations.

Soit $X \in \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$. On note σ l'involution algébrique agissant sur X. Pour tout k, on va chercher à calculer la suite spectrale ${}^k_I\widehat{E}(X)$. Pour cela, on utilise la suite exacte de Smith Nash-constructible, que l'on avait obtenue lors de l'étude du complexe de poids avec action de $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (3.4.5).

Soit $k \in \mathbb{Z}$, écrivons le complexe double $({}^k\widehat{C}_{\alpha,\beta}(X))_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$:

$$\begin{tikzcd}
& {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
{} \arrow[r] & H^{-k-(\alpha+1)}\left(G, \frac{\mathcal{N}_{\alpha+1}C_{\beta+1}}{\mathcal{N}_\alpha C_{\beta+1}}\right) \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "d^1"] & H^{-k-\alpha}\left(G, \frac{\mathcal{N}_\alpha C_{\beta+1}}{\mathcal{N}_{\alpha-1} C_{\beta+1}}\right) \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "d^1"] & H^{-k-(\alpha-1)}\left(G, \frac{\mathcal{N}_{\alpha-1}C_{\beta+1}}{\mathcal{N}_{\alpha-2} C_{\beta+1}}\right) \arrow[r] \arrow[d, "d^1"] & {} \\
{} \arrow[r] & H^{-k-(\alpha+1)}\left(G, \frac{\mathcal{N}_{\alpha+1}C_{\beta}}{\mathcal{N}_\alpha C_{\beta}}\right) \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "d^1"] & H^{-k-\alpha}\left(G, \frac{\mathcal{N}_\alpha C_{\beta}}{\mathcal{N}_{\alpha-1} C_{\beta}}\right) \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "d^1"] & H^{-k-(\alpha-1)}\left(G, \frac{\mathcal{N}_{\alpha-1}C_{\beta}}{\mathcal{N}_{\alpha-2} C_{\beta}}\right) \arrow[r] \arrow[d, "d^1"] & {} \\
{} \arrow[r] & H^{-k-(\alpha+1)}\left(G, \frac{\mathcal{N}_{\alpha+1}C_{\beta-1}}{\mathcal{N}_\alpha C_{\beta-1}}\right) \arrow[r, "d^0"] \arrow[d] & H^{-k-\alpha}\left(G, \frac{\mathcal{N}_\alpha C_{\beta-1}}{\mathcal{N}_{\alpha-1} C_{\beta-1}}\right) \arrow[r, "d^0"] \arrow[d] & H^{-k-(\alpha-1)}\left(G, \frac{\mathcal{N}_{\alpha-1}C_{\beta-1}}{\mathcal{N}_{\alpha-2} C_{\beta-1}}\right) \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
& {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

On cherche à déterminer les premiers termes de la suite spectrale ${}^k_I\widehat{E}$ associée.

On montre que

Proposition 5.2.6. *On a*

$$ {}^k_I\widehat{E}^1_{\alpha,\beta} = \begin{cases} \frac{\mathcal{N}_\alpha C_\beta(X^G)}{\mathcal{N}_{\alpha-1}C_\beta(X^G)} \ si \ -k-\alpha \geq 1, \\ \\ \frac{(\mathcal{N}_\alpha C_\beta)^G}{(\mathcal{N}_{\alpha-1}C_\beta)^G} \ si \ -k-\alpha = 0, \\ \\ 0 \ sinon. \end{cases} $$

Démonstration. Si $-k-\alpha < 0$: Les espaces de cohomologie d'un groupe G à valeur dans $\mathbb{Z}[G]$-module sont nuls en degré négatif.

Si $-k-\alpha = 0$: On a

$$H^{-k-\alpha}\left(G, \frac{\mathcal{N}_\alpha C_\beta}{\mathcal{N}_{\alpha-1}C_\beta}\right) = \left(\frac{\mathcal{N}_\alpha C_\beta}{\mathcal{N}_{\alpha-1}C_\beta}\right)^G$$

et

$$H^{-k-(\alpha-1)}\left(G, \frac{\mathcal{N}_{\alpha-1} C_\beta}{\mathcal{N}_{\alpha-2}C_\beta}\right) = \frac{\left(\mathcal{N}_{\alpha-1}C_\beta/\mathcal{N}_{\alpha-2}C_\beta\right)^G}{im(1+\sigma)},$$

où les morphismes induits par σ sur les chaînes et les classes des chaînes sont également notés σ.

On note $[c]$ (resp. $\langle c' \rangle$) la classe d'une chaîne $c \in \mathcal{N}_\alpha C_\beta$ (resp. $c' \in \mathcal{N}_{\alpha-1} C_\beta$) dans le quotient $\frac{\mathcal{N}_\alpha C_\beta}{\mathcal{N}_{\alpha-1} C_\beta}$ (resp. $\frac{\mathcal{N}_{\alpha-1} C_\beta}{\mathcal{N}_{\alpha-2} C_\beta}$), puis $\widehat{\langle c' \rangle}$ l'image d'une classe invariante dans $\frac{\left(\mathcal{N}_{\alpha-1} C_\beta / \mathcal{N}_{\alpha-2} C_\beta\right)^G}{im(1+\sigma)}$.

Considérons alors un élément

$$[c] \in {}^k_I\widehat{E}^1_{\alpha,\beta} = ker \left(H^{-k-\alpha}\left(G, \frac{\mathcal{N}_\alpha C_\beta}{\mathcal{N}_{\alpha-1} C_\beta}\right) \xrightarrow{d^0} H^{-k-(\alpha-1)}\left(G, \frac{\mathcal{N}_{\alpha-1} C_\beta}{\mathcal{N}_{\alpha-2} C_\beta}\right)\right),$$

i.e. $(1+\sigma)c \in \mathcal{N}_{\alpha-1} C_\beta$ et il existe $c_0 \in \mathcal{N}_{\alpha-1} C_\beta$ tel que $\langle (1+\sigma)c \rangle = \langle (1+\sigma)c_0 \rangle$, i.e. $\gamma := (1+\sigma)(c+c_0) \in \mathcal{N}_{\alpha-2} C_\beta$.

Or γ est invariant sous l'action de σ et sa restriction à X^G est nulle (l'action commute avec la restriction). Il existe donc $\gamma_0 \in \mathcal{N}_{\alpha-1} C_\beta$ tel que $\gamma = (1+\sigma)\gamma_0$ et on a alors $(1+\sigma)(c+c_0+\gamma_0) = 0$.

On peut donc représenter la classe $[c]$ dans $\left(\frac{\mathcal{N}_\alpha C_\beta}{\mathcal{N}_{\alpha-1} C_\beta}\right)^G$ par l'élément $c + c_0 + \gamma_0 \in \mathcal{N}_\alpha C_\beta$ invariant sous l'action de G.

Considérons alors le morphisme naturel

$$\psi : (\mathcal{N}_\alpha C_\beta)^G \to {}^k_I\widehat{E}^1_{\alpha,\beta} \ ; \ c \mapsto [c].$$

On vient de montrer sa surjectivité. De plus, si $\psi(c) = 0$, cela signifie que $c \in \mathcal{N}_{\alpha-1} C_\beta$. Le noyau de ψ est donc $(\mathcal{N}_{\alpha-1} C_\beta)^G$, et on a un isomorphisme naturel

$$\frac{(\mathcal{N}_\alpha C_\beta)^G}{(\mathcal{N}_{\alpha-1} C_\beta)^G} \cong {}^k_I\widehat{E}^1_{\alpha,\beta}.$$

<u>Si $-k-\alpha \geq 1$:</u> On a

$$H^{-k-\alpha}\left(G, \frac{\mathcal{N}_\alpha C_\beta}{\mathcal{N}_{\alpha-1} C_\beta}\right) = \frac{(\mathcal{N}_\alpha C_\beta / \mathcal{N}_{\alpha-1} C_\beta)^G}{im(1+\sigma)}$$

et

$$H^{-k-(\alpha-1)}\left(G, \frac{\mathcal{N}_{\alpha-1} C_\beta}{\mathcal{N}_{\alpha-2} C_\beta}\right) = \frac{(\mathcal{N}_{\alpha-1} C_\beta / \mathcal{N}_{\alpha-2} C_\beta)^G}{im(1+\sigma)}.$$

On conserve les notations précédentes en rajoutant $\overline{[c]}$ pour désigner l'image d'une classe invariante dans $\frac{\left(\mathcal{N}_\alpha C_\beta / \mathcal{N}_{\alpha-1} C_\beta\right)^G}{im(1+\sigma)}$.

Soit alors

$$\overline{[c]} \in ker \left(H^{-k-\alpha}\left(G, \frac{\mathcal{N}_\alpha C_\beta}{\mathcal{N}_{\alpha-1} C_\beta}\right) \xrightarrow{d^0} H^{-k-(\alpha-1)}\left(G, \frac{\mathcal{N}_{\alpha-1} C_\beta}{\mathcal{N}_{\alpha-2} C_\beta}\right)\right),$$

En particulier,

$$[c] \in ker \left(\left(\frac{\mathcal{N}_\alpha C_\beta}{\mathcal{N}_{\alpha-1} C_\beta}\right)^G \to \frac{(\mathcal{N}_{\alpha-1} C_\beta / \mathcal{N}_{\alpha-2} C_\beta)^G}{im(1+\sigma)} \right).$$

En reprenant ce que l'on a fait au cas précédent, on sait que l'on peut représenter la classe $[c]$ dans $\left(\frac{\mathcal{N}_\alpha C_\beta}{\mathcal{N}_{\alpha-1}C_\beta}\right)^G$ par un élément c' de $(\mathcal{N}_\alpha C_\beta)^G$.

Or d'après la suite exacte courte de Smith Nash-constructible (3.4.5 et 3.4.2), il existe $\gamma' \in \mathcal{N}_{\alpha+1}C_\beta$ tel que

$$c' = c'|_{X^G} + (1+\sigma)\gamma'.$$

On a donc $[c] = [c'|_{X^G}] + [(1+\sigma)\gamma']$ dans $\left(\frac{\mathcal{N}_\alpha C_\beta}{\mathcal{N}_{\alpha-1}C_\beta}\right)^G$.

Mais

$$\overline{[(1+\sigma)\gamma']} \in im\ \left(H^{-k-(\alpha+1)}\left(G, \frac{\mathcal{N}_{\alpha+1}C_\beta}{\mathcal{N}_\alpha C_\beta}\right) \xrightarrow{d^0} H^{-k-\alpha}\left(G, \frac{\mathcal{N}_\alpha C_\beta}{\mathcal{N}_{\alpha-1}C_\beta}\right)\right)$$

car $\gamma' \in \mathcal{N}_{\alpha+1}C_\beta$ et $(1+\sigma)\gamma' = c' + c'|_{X^G} \in \mathcal{N}_\alpha C_\beta$.

Ainsi, dans ${}^k_I\widehat{E}^1_{\alpha,\beta}$, la classe de $\overline{[(1+\sigma)\gamma']}$ est nulle, et la classe de $\overline{[c]}$ est représentée par $\overline{[c'|_{X^G}]}$, où $c'|_{X^G}$ est une chaîne de $\mathcal{N}_\alpha C_\beta(X^G)$.

Considérons alors le morphisme naturel

$$\psi : \mathcal{N}_\alpha C_\beta(X^G) \to {}^k_I\widehat{E}^1_{\alpha,\beta}\ ;\ c \mapsto [c].$$

On vient de montrer sa surjectivité. Soit maintenant $c \in \mathcal{N}_\alpha C_\beta(X^G)$ tel que $\psi(c) = 0$. Cela signifie que $\overline{[c]} = \overline{[(1+\sigma)c_0]}$ avec $c_0 \in \mathcal{N}_{\alpha+1}C_\beta$, i.e. qu'il existe $c_1 \in \mathcal{N}_\alpha C_\beta,\ c_2 \in \mathcal{N}_{\alpha-1}C_\beta$ tels que

$$c = (1+\sigma)c_0 + (1+\sigma)c_1 + c_2.$$

En appliquant l'opération de restriction à X^G à toutes ces chaînes, on obtient

$$c = c|_{X^G} = (1+\sigma)c_0|_{X^G} + (1+\sigma)c_1|_{X^G} + c_2|_{X^G} = c_2|_{X^G} \in \mathcal{N}_{\alpha-1}C_\beta(X^G).$$

Le noyau de ψ est donc $\mathcal{N}_{\alpha-1}C_\beta(X^G)$ et on a un isomorphisme naturel

$$\frac{\mathcal{N}_\alpha C_\beta(X^G)}{\mathcal{N}_{\alpha-1}C_\beta(X^G)} \cong {}^k_I\widehat{E}^1_{\alpha,\beta}.$$

$\square$

Pour k fixé, la page 1 de la suite spectrale ${}^k_I\widehat{E}$ s'écrit donc (à partir à gauche de la colonne

$\alpha = -k)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\frac{(\mathcal{N}_{-k}C_{\beta+1})^G}{(\mathcal{N}_{-k-1}C_{\beta+1})^G} & & \frac{\mathcal{N}_{-k-1}C_{\beta+1}(X^G)}{\mathcal{N}_{-k-2}C_{\beta+1}(X^G)} & \cdots & \frac{\mathcal{N}_{\alpha}C_{\beta+1}(X^G)}{\mathcal{N}_{\alpha-1}C_{\beta+1}(X^G)} & \cdots \\
\downarrow d^1 & & \downarrow d^1 & & \downarrow d^1 & & \\
\frac{(\mathcal{N}_{-k}C_{\beta})^G}{(\mathcal{N}_{-k-1}C_{\beta})^G} & & \frac{\mathcal{N}_{-k-1}C_{\beta}(X^G)}{\mathcal{N}_{-k-2}C_{\beta}(X^G)} & \cdots & \frac{\mathcal{N}_{\alpha}C_{\beta}(X^G)}{\mathcal{N}_{\alpha-1}C_{\beta}(X^G)} & \cdots \\
\downarrow d^1 & & \downarrow d^1 & & \downarrow d^1 & & \\
\frac{(\mathcal{N}_{-k}C_{\beta-1})^G}{(\mathcal{N}_{-k-1}C_{\beta-1})^G} & & \frac{\mathcal{N}_{-k-1}C_{\beta-1}(X^G)}{\mathcal{N}_{-k-2}C_{\beta-1}(X^G)} & \cdots & \frac{\mathcal{N}_{\alpha}C_{\beta-1}(X^G)}{\mathcal{N}_{\alpha-1}C_{\beta-1}(X^G)} & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & &
\end{array}$$

Rappelons que les différentielles d^1 sont induites par les différentielles des complexes $C_*(X)$ et $C_*(X^G)$. En se rappelant également que la suite spectrale de poids est définie au terme E^0 via la filtration Nash-constructible par

$$E^0_{\alpha,*-\alpha} = \frac{\mathcal{N}_\alpha C_*}{\mathcal{N}_{\alpha-1}C_*},$$

on écrit, en utilisant la réindexation de la suite spectrale de poids, la page 2 de la suite spectrale ${}^k_I\widehat{E}$:

$$\begin{array}{ccccccc}
H_{\beta+1}\left(\frac{(\mathcal{N}_{-k}C_*)^G}{(\mathcal{N}_{-k-1}C_*)^G}\right) & & \widetilde{E}^2_{-k-1+(\beta+1),k+1}(X^G) & \cdots & \widetilde{E}^2_{\alpha+(\beta+1),-\alpha}(X^G) & \cdots \\
 & & & & & \\
H_{\beta}\left(\frac{(\mathcal{N}_{-k}C_*)^G}{(\mathcal{N}_{-k-1}C_*)^G}\right) & & \widetilde{E}^2_{-k-1+\beta,k+1}(X^G) & \cdots & \widetilde{E}^2_{\alpha+\beta,-\alpha}(X^G) & \cdots \\
 & & & & & \\
H_{\beta-1}\left(\frac{(\mathcal{N}_{-k}C_{\beta-1})^G}{(\mathcal{N}_{-k-1}C_{\beta-1})^G}\right) & & \widetilde{E}^2_{-k-1+(\beta-1),k+1}(X^G) & \cdots & \widetilde{E}^2_{\alpha+(\beta-1),-\alpha}(X^G) & \cdots
\end{array}$$

(remarquons que la suite spectrale ${}^k_I\widehat{E}$ dégénère ainsi à la page 2).

Dans le cas où les espaces vectoriels $H_\beta\left(\frac{(\mathcal{N}_{-k}C_*)^G}{(\mathcal{N}_{-k-1}C_*)^G}\right)$ sont tous de dimension finie, comme les invariants B_k sont les caractéristiques d'Euler de la suite spectrale ${}^k_I\widehat{E}$ (lorsque ces quantités sont bien définies), on déduit de ce calcul l'égalité suivante

Proposition 5.2.7. *Pour $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pour tout k et toute G-variété algébrique réelle X pour laquelle ces quantités sont définies,*

$$B_k^G(X) = (-1)^k \chi\left(H_*\left(\frac{(\mathcal{N}_{-k}C_*)^G}{(\mathcal{N}_{-k-1}C_*)^G}\right)\right) + \sum_{q \geq k+1} \beta_q\left(X^G\right).$$

Démonstration. On a, lorsque cela est bien défini,

$$\chi\left({}_I^k\widehat{E}^2\right) = (-1)^k \chi\left(H_*\left(\frac{(\mathcal{N}_{-k}C_*)^G}{(\mathcal{N}_{-k-1}C_*)^G}\right)\right) + \sum_{\alpha \leq -k-1} (-1)^\alpha \chi\left(\widetilde{E}^2_{\alpha+*,-\alpha}\left((X^G\right)\right).$$

Or, pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}$,

$$\chi\left(\widetilde{E}^2_{\alpha+*,-\alpha}\left(X^G\right)\right) = (-1)^\alpha \beta_{-\alpha}\left(X^G\right)$$

par 2.3.4. □

Pour toute G-variété algébrique réelle X (avec $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) et tout $k \in \mathbb{Z}$, notons donc (lorsque cela est bien défini) :

$$'B_k^G(X) := (-1)^k \chi\left(H_*\left(\frac{(\mathcal{N}_{-k}C_*)^G}{(\mathcal{N}_{-k-1}C_*)^G}\right)\right) + \sum_{q \geq k+1} \beta_q\left(X^G\right).$$

Ces nouveaux invariants $'B_k^G$ sont additifs sur les G-variétés algébriques réelles pour lesquelles ils sont bien définis, par l'additivité des nombres de Betti virtuels et la suite exacte longue d'homologie de 5.1.4.

La question serait maintenant de savoir s'ils réalisent les nombres de Betti virtuels équivariants, autrement dit, pour tout k, a-t-on $'B_k^G(X) = \dim_{\mathbb{Z}_2} H_k(X;G)$ si X est une G-variété algébrique réelle compacte non singulière ?

On montre que la réponse est positive pour $k < 0$. Notons que dans ce cas, $'B_k^G$ est défini pour toute G-variété algébrique réelle : pour tout $k < 0$ et tout $X \in \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$, on a $'B_k^G(X) = \sum_{q \geq k+1} \beta_q\left(X^G\right)$.

Corollaire 5.2.8. *Soit $k < 0$. Pour tout $X \in \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$, on a :*

$$'B_k^G(X) = \sum_q \beta_q\left(X^G\right) = \beta_k^G(X)$$

Démonstration. Pour toute G-variété algébrique réelle X,

$$'B_k^G(X) = \sum_{q \geq k+1} \beta_q\left(X^G\right) = \sum_{q \geq 0} \beta_q\left(X^G\right).$$

Soit maintenant X une G-variété algébrique réelle compacte non singulière. Alors X^G est également une variété algébrique réelle compacte non singulière et

$$'B_k^G(X) = \sum_q \dim_{\mathbb{Z}_2} H_q\left(X^G\right) = \dim_{\mathbb{Z}_2} H_k(X;G),$$

car $k < 0$ (4.3.4). □

Le deuxième fait notable est que, appliqués à une variété algébrique réelle compacte munie d'une action libre de G, les invariants $'B_k^G$ sont tous définis et donnent les nombres de Betti virtuels du quotient (qui est un ensemble symétrique par arcs) :

Corollaire 5.2.9. *Soit X une variété algébrique réelle compacte munie d'une action libre de $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors, les quantités $'B_k^G(X)$ sont définies pour tout k, et on a*

$$'B_k^G(X) = \beta_k(X/G).$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Comme l'action de G sur X, qui est compacte, est libre, on a, par 3.4.6, un isomorphisme de complexes

$$(\mathcal{N}_{-k}C_*(X))^G \cong \mathcal{N}_{-k}C_*(X/G).$$

Ainsi les groupes d'homologie $H_n\left(\frac{(\mathcal{N}_{-k}C_*)^G}{(\mathcal{N}_{-k-1}C_*)^G}\right) = H_n\left(\frac{\mathcal{N}_{-k}C_*(X/G)}{\mathcal{N}_{-k-1}C_*(X/G)}\right)$ sont tous de dimension finie.

De plus, $X^G = \emptyset$ et on a donc

$$\begin{aligned} 'B_k^G(X) &= (-1)^k \chi\left(H_*\left(\frac{\mathcal{N}_{-k}C_*(X/G)}{\mathcal{N}_{-k-1}C_*(X/G)}\right)\right) \\ &= (-1)^k \sum_\beta (-1)^\beta \dim_{\mathbb{Z}_2} \widetilde{E}^2_{-k+\beta,k}(X/G) \\ &= \beta_k(X/G). \end{aligned}$$

□

G. Fichou a remarqué dans [12] que les nombres de Betti virtuels équivariants réalisaient eux aussi cette égalité. Ils coïncident donc avec les invariants $'B_k^G$ sur les variétés algébriques réelles compactes munies d'une action libre de $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

Corollaire 5.2.10. *Pour $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on a*

$$'B_k^G(X) = \beta_k^G(X)$$

si

- $k < 0$ *et X est une G-variété algébrique réelle quelconque,*
- *X est une G-variété algébrique réelle compacte munie d'une action libre de G, pour tout k,*
- $\dim X = d$ *et* $k = d$,
- $\dim X = 1$ *pour tout* k.

Démonstration. Soit X une G-variété algébrique réelle de dimension d. Alors

$$H_n\left(\frac{(\mathcal{N}_{-d}C_*(X))^G}{(\mathcal{N}_{-d-1}C_*(X))^G}\right) = \begin{cases} (\mathcal{N}_{-d}C_d(X))^G \text{ si } n = d, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Or $\mathcal{N}_{-d}C_d(X) \subset ker\ \partial_d$ qui est de dimension finie (car $\dim X = d$), donc $'B_d^G(X)$ est bien défini, et on a, comme l'ensemble des points fixes X^G est de dimension $\leq d$,

$$'B_d^G(X) = \dim_{\mathbb{Z}_2}(\mathcal{N}_{-d}C_d(X))^G.$$

Supposons que X soit compacte et non singulière. Alors $\mathcal{N}_{-d}C_d(X) = ker\ \partial_d = H_d\left((C_*(X))^G\right) = H_d(X;G)$ (4.3.4).

Supposons maintenant que $d = 1$. Alors

$$H_n\left(\frac{(C_*(X))^G}{(\mathcal{N}_{-1}C_*(X))^G}\right) = \begin{cases} \frac{(ker\ \partial_1)^G}{(\mathcal{N}_{-1}C_*(X))^G} \text{ si } n = 1, \\ H_0\left((C_*(X))^G\right) \text{ si } n = 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Ainsi $'B_0^G(X)$ est bien défini et, si X est compacte non singulière, $H_1\left(\frac{(C_*(X))^G}{(\mathcal{N}_{-1}C_*(X))^G}\right) = 0$ et

$$'B_0^G(X) = \dim_{\mathbb{Z}_2} H_0\left((C_*(X))^G\right) + \dim_{\mathbb{Z}_2} H_1\left(X^G\right) = \dim_{\mathbb{Z}_2} H_0(X;G).$$

□

Cela nous encourage à penser que ces deux groupes d'invariants n'en forment qu'un seul. Cependant, ce ne sont là que des indices et il nous reste toujours à montrer, si cela est bien le cas, que les invariants B_k^G coïncident avec les nombres de Betti équivariants sur les variétés compactes non singulières. Si cela n'est pas le cas, les invariants additifs B_k^G enrichiront notre boîte à outils pour étudier la géométrie des variétés algébriques réelles avec action.

Dans tous les cas, un travail futur devra être effectué pour comprendre l'homologie des complexes $(\mathcal{N}_\alpha C_*)^G$ qui, d'après ce que nous venons de voir, paraissent centraux. Des considérations géométriques et une technique minutieuse semblent nécessaires, notamment pour savoir si le quasi-isomorphisme filtré $\mathcal{N}_\alpha C_*(X) \to F_\alpha^{can} C_*(X)$, pour X compacte non singulière, est préservé par le foncteur Γ^G.

Dans le point suivant, on donne une réalisation effective des nombres de Betti virtuels équivariants dans le cas où $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pour cela, on établit l'existence d'un complexe de poids invariant induisant une filtration sur l'homologie des chaînes invariantes, aux propriétés similaires à celles des autres complexes de poids que nous avons considérés. La suite spectrale induite nous permet alors d'extraire des invariants additifs sur les G-variétés algébriques réelles, dont on montre qu'ils sont reliés, via les nombres de Betti virtuels des points fixes, aux nombres de Betti virtuels équivariants. Cette construction, d'apparence indépendante de celle du complexe de poids équivariant, pourrait lui être inextricablement liée, via celle des invariants $'B_k^G$, si le complexe de poids invariant était réalisé par la filtration Nash-constructible. Cette réalisation serait impliquée par une réponse positive à la question de l'existence d'un quasi-isomorphisme filtré $(\mathcal{N}_\alpha C_*)^G \to (F_\alpha^{can} C_*)^G$ sur les variétés lisses compactes.

5.2.4 Complexe de poids invariant et nombres de Betti virtuels équivariants

Soit $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

On montre ici l'existence et l'unicité d'un foncteur acyclique et additif, qui étend à toutes les variétés algébriques réelles le foncteur $X \mapsto (F^{can}C_*(X))^G$ défini sur les G-variétés projectives et lisses (5.2.12). On utilise pour cela la version avec action de groupe du critère d'extension de F. Guillén et V. Navarro-Aznar (3.2.1). Cela est rendu possible par le fait que, lorsque $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pour tout carré acyclique élémentaire dans $\mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$, on a une suite exacte courte

$$0 \to H_k((C_*(\widetilde{Y}))^G) \to H_k((C_*(Y))^G) \oplus H_k((C_*(\widetilde{X}))^G) \to H_k((C_*(X))^G) \to 0$$

pour tout k (5.2.11).

A partir de la suite spectrale de poids induite par le complexe filtré de poids invariant, on exhibe un invariant additif sur les G-variétés algébriques réelles (5.2.14). En les combinant avec les nombres de Betti virtuels des ensembles des points fixes, on retrouve alors les nombres de Betti virtuels équivariants (5.2.16).

Afin de pouvoir montrer l'existence du complexe de poids invariant, on aura besoin, comme annoncé, des suites exactes courtes d'homologie des chaînes invariantes pour un carré acyclique élémentaire. Pour le montrer, on utilisera les liens qui unissent l'homologie des chaînes invariantes avec l'homologie équivariante et l'homologie des points fixes, et le fait que celles-ci vérifient cette exactitude :

Proposition 5.2.11. *Soit $\pi : \widetilde{X} \to X$ l'éclatement équivariant d'une G-variété algébrique réelle compacte non singulière X le long d'un centre non singulier Y stable sous l'action de G. On note $\widetilde{Y}$ le diviseur exceptionnel. Alors, pour tout k, on a une suite exacte courte*

$$0 \to H_k((C_*(\widetilde{Y}))^G) \to H_k((C_*(Y))^G) \oplus H_k((C_*(\widetilde{X}))^G) \to H_k((C_*(X))^G) \to 0.$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a (4.3.4), pour tout $Z \in \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$,

$$H_k(Z;G) = H_k\left((C_*(Z))^G\right) \oplus \bigoplus_{i \geq k+1} H_i(Z^G)$$

donc

$$H_k\left((C_*(Z))^G\right) = H_k(Z;G) / \bigoplus_{i \geq k+1} H_i(Z^G).$$

Or, d'après [12] et [35],

$$0 \to H_k(\widetilde{Y};G) \to H_k(Y;G) \oplus H_k(\widetilde{X};G) \to H_k(X;G) \to 0$$

est une suite exacte courte, et par [25], pour tout $i \geq k+1$,

$$0 \to H_i(\widetilde{Y}^G) \to H_i(Y^G) \oplus H_i(\widetilde{X}^G) \to H_i(X^G) \to 0$$

est une suite exacte courte.

Donc, les suites exactes de la paire $\left(\bigoplus_{i \geq k+1} H_i(\,\cdot^G), H_k(\,\cdot\,;G)\right)$ induisent la suite exacte courte

$$0 \to H_k((C_*(\widetilde{Y}))^G) \to H_k((C_*(Y))^G) \oplus H_k((C_*(\widetilde{X}))^G) \to H_k((C_*(X))^G) \to 0.$$

$\square$

On peut alors établir l'existence d'un complexe de poids invariant d'une façon semblable au complexe de poids de C. McCrory et A. Parusiński :

Proposition 5.2.12. *Le foncteur*

$$(F^{can}C_*)^G : \mathbf{V}^G(\mathbb{R}) \longrightarrow H \circ \mathcal{C}; X \mapsto (F^{can}C_*(X))^G \, (= F^{can}\left(C_*(X))^G\right)$$

admet une extension en un foncteur

$$_G\mathcal{W}C_* : \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R}) \longrightarrow H \circ \mathcal{C}$$

défini pour toutes les G-variétés algébriques réelles et tous les morphismes propres réguliers équivariants, qui vérifie les propriétés suivantes :

1. *Acyclicité : Pour tout carré acyclique dans $\mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$, le complexe filtré simple du $\square_1^+$-diagramme dans $\mathcal{C}$*
$$\begin{array}{ccc} {}_G\mathcal{W}C_*(\widetilde{Y}) & \rightarrow & {}_G\mathcal{W}C_*(\widetilde{X}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}_G\mathcal{W}C_*(Y) & \rightarrow & {}_G\mathcal{W}C_*(X) \end{array}$$
est acyclique.
2. *Additivité : Pour une inclusion fermée équivariante $Y \subset X$, le complexe filtré simple du $\square_0^+$-diagramme dans $\mathcal{C}$*
$$_G\mathcal{W}C_*(Y) \rightarrow {}_G\mathcal{W}C_*(X)$$
est isomorphe à $_G\mathcal{W}C_*(X \setminus Y)$.

Un tel foncteur $_G\mathcal{W}C_*$ est unique à un isomorphisme de $H \circ \mathcal{C}$ unique près.

Démonstration. On utilise la version avec action du critère de F. Guillén et V. Navarro Aznar (3.2.1).

Le foncteur $(F^{can}C_*)^G$, se factorisant par $\mathcal{C}$ (qui est une catégorie de descente homologique), est Φ-rectifié, et vérifie de plus la condition (F1) car, si X et Y sont deux G-variétés algébriques réelles, $(F^{can}C_*(X \sqcup Y))^G = (F^{can}C_*(X))^G \oplus (F^{can}C_*(Y))^G$.

Il vérifie enfin la condition (F2). En effet, les calculs pour déterminer la suite spectrale induite par le complexe filtré simple associé à un carré acyclique dans $\mathbf{Reg}_{comp}^G(\mathbb{R})$ auquel on a appliqué le foncteur $(F^{can}C_*)^G$ sont alors exactement les mêmes que dans le cadre non-équivariant. Le fait que le terme E^1 soit nul repose alors sur l'exactitude des suites

$$0 \rightarrow H_k((C_*(\widetilde{Y})^G) \rightarrow H_k((C_*(Y)^G) \oplus H_k((C_*(\widetilde{X})^G) \rightarrow H_k((C_*(X)^G) \rightarrow 0,$$

donnée dans 5.2.11. $\square$

Si X est une G-variété algébrique réelle, on appelle $_G\mathcal{W}C_*(X)$ le complexe de poids invariant de X. L'homologie du complexe de poids invariant est l'homologie du complexe des chaînes invariantes :

Proposition 5.2.13. *Pour toute G-variété algébrique réelle X, et pour tout n, on a*

$$H_n({}_G\mathcal{W}C_*(X)) = H_n\left((C_*(X))^G\right).$$

Démonstration. Les suites exactes courtes

$$0 \to C_k(\widetilde{X}) \to C_k(Y) \oplus C_k(\widetilde{X}) \to C_k(X) \to 0$$

et

$$0 \to C_k(Y) \to C_k(X) \to C_k(X \setminus Y) \to 0,$$

associées respectivement à un carré acyclique dans $\mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$ et à une inclusion fermée équivariante, sont scindées par des morphismes équivariants ($c \mapsto \pi^{-1}c$ et $c \mapsto \overline{c}$).

Les suites de complexes

$$0 \to (C_*(\widetilde{X}))^G \to (C_*(Y))^G \oplus (C_*(\widetilde{X}))^G \to (C_*(X))^G \to 0$$

et

$$0 \to (C_*(Y))^G \to (C_*(X))^G \to (C_*(X \setminus Y))^G \to 0$$

sont donc exactes et le foncteur $(C_*)^G : \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{D}$; $X \mapsto (C_*(X))^G$ vérifie donc les conditions d'acyclicité et d'additivité, ce qui est également le cas de $\varphi \circ {}_G\mathcal{W}C_* : \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{D}$. Ces deux foncteurs étant enfin des extensions de $(C_*)^G : \mathbf{V}^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathcal{D}$, par l'unicité donnée par le critère d'extension avec action, ils sont quasi-isomorphes. □

Si $X \in \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$, la suite spectrale induite par le complexe de poids invariant ${}_G\mathcal{W}C_*(X)$ de X, appelée suite spectrale de poids invariante et notée ${}_GE(X)$, converge donc vers l'homologie $H_*\left((C_*(X))^G\right)$ des chaînes invariantes de X.

On y lit la condition d'additivité du complexe de poids invariant, et on peut alors en extraire un invariant additif sur les G-variétés algébriques réelles, qui coïncide avec l'homologie des chaînes invariantes sur les variétés lisses compactes :

Proposition 5.2.14. *On note ${}_G\widetilde{E}$ la suite spectrale de poids réindexée en posant $p' = 2p + q$, $q' = -p$ et $r' = r + 1$. Pour tout $X \in \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$ et tout q, on pose alors*

$${}_G\beta_q(X) := \sum_p (-1)^p \dim {}_G\widetilde{E}^2_{p,q}(X).$$

Pour tout q, ${}_G\beta_q$ est additif sur les G-variétés algébriques réelles et si X est compacte non singulière, ${}_G\beta_q(X) = H_q((C_*(X))^G)$.

Démonstration. L'additivité se déduit de la condition d'additivité du complexe de poids invariant, de la même façon que dans le cadre sans action (preuve de 2.3.4).

Egalement comme dans ce cadre, la deuxième condition se déduit du fait que le complexe de poids invariant de X soit quasi-isomorphe à $(F^{can}C_*(X))^G$ si X est lisse compacte. Pour montrer cela, on utilise la propriété d'extension de l'inclusion de catégorie $\mathbf{V}^G(\mathbb{R}) \to \mathbf{Reg}^G_{comp}(\mathbb{R})$, et l'additivité et l'acyclicité du foncteur $(F^{can}C_*)^G$ dans $\mathbf{Reg}^G_{comp}(\mathbb{R})$. □

Remarque 5.2.15. Les termes ${}_G\widetilde{E}^2_{p,q}$ sont bien tous de dimension finie, et les invariants ${}_G\beta_q$ bien définis. En effet, la suite spectrale de poids invariante est isomorphe à une suite spectrale associée à une hyperrésolution cubique équivariante, de la même manière que dans le cadre sans action (2.4.2), mais cette fois-ci en considérant les chaînes invariantes.

A partir des invariants ${}_G\beta_q$, on va alors pouvoir retrouver les nombres de Betti virtuels équivariants :

Théorème 5.2.16. *Pour toute G-variété algébrique réelle X et tout q, on a*

$$\beta_q^G(X) = {}_G\beta_q(X) + \sum_{i \geq q+1} \beta_i\left(X^G\right).$$

Démonstration. Soit $q \in \mathbb{Z}$. L'additivité du membre de droite est donnée par celles de ${}_G\beta_q$ et des nombres de Betti virtuels.

Enfin, si X est une G-variété algébrique compacte non singulière,

$${}_G\beta_q(X) + \sum_{i \geq q+1} \beta_i\left(X^G\right) = \dim_{\mathbb{Z}_2} H_q\left((C_*(X))^G\right) + \sum_{i \geq q+1} \dim_{\mathbb{Z}_2} H_i\left(X^G\right) = \dim_{\mathbb{Z}_2} H_q(X;G)$$

(d'après 4.3.4). □

On retrouve donc les nombres de Betti virtuels équivariants pour $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, à partir du complexe de poids invariant et du complexe de poids des ensembles de points fixes. Cependant, cela s'est fait a priori indépendamment de notre étude du complexe de poids équivariant. Pourtant, notons que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et tout $X \in \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$, ${}_G\beta_k(X) = (-1)^k \chi\left(H_*\left(\frac{{}_G\mathcal{W}_{-k}C_*(X)}{{}_G\mathcal{N}_{-k-1}C_*(X)}\right)\right)$. Ainsi, si l'on montre que le foncteur $(\mathcal{N}C_*)^G : \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}$ réalise le complexe de poids invariant, le lien sera alors établi entre les nombres de Betti virtuels équivariants et la suite spectrale de poids équivariante (construite à partir de la filtration Nash-constructible). En effet, on aura la preuve par ce biais que les invariants ${}'B_k^G$, définis à partir de suites spectrales induites par la suite spectrale de poids équivariante, sont bien définis sur $\mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$ et égaux aux nombres de Betti virtuels équivariants.

Tout au long de notre étude, nous avons établi l'existence de plusieurs complexes de poids -avec action, équivariant, invariant. La filtration géométrique/Nash-constructible (avec action) semble être le lien qui pourrait les unir. Si l'on montre que celle-ci réalise le complexe de poids invariant, elle deviendra la passerelle qui nous permettra de passer entre ces différents objets, ainsi que l'outil pour en extraire de nombreuses informations sur les $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-variétés algébriques réelles.

Or, ce foncteur vérifie déjà les conditions d'acyclicité et d'additivité, dès le niveau des chaînes en vertu de la décomposition par des morphismes équivariants des suites exactes courtes

$$0 \to \mathcal{N}_pC_k(\widetilde{Y}) \to \mathcal{N}_pC_k(Y) \oplus \mathcal{N}_pC_k(\widetilde{X}) \to \mathcal{N}_pC_k(X) \to 0$$

et

$$0 \to \mathcal{N}_pC_k(Y) \to \mathcal{N}_pC_k(X) \to \mathcal{N}_pC_k(X \setminus Y) \to 0.$$

Le point central (et difficile) de cette étude serait donc la preuve que l'inclusion $(\mathcal{N}C_*(X))^G \subset (F^{can}C_*(X))^G$ est un quasi-isomorphisme, une propriété dont on avait déjà discerné l'importance dans notre étude des invariants $'B_k^G$.

Remarquons ensuite que notre étude nous permettra de mieux comprendre les nombres de Betti virtuels équivariants eux-mêmes, entre autres d'identifier leur comportement par rapport aux produits. Le fait de savoir qu'ils sont inextricablement liés (via la géométrie des points fixes) aux invariants ${}_G\beta_k$, reliés eux à l'homologie des chaînes invariantes, nous permet de prendre conscience que ces deux groupes d'invariants additifs doivent être considérer de pair. Plus encore, il nous faut toujours garder en tête le lien qui unit l'homologie équivariante et l'homologie des chaînes invariantes pour, lors de nos études des G-variétés algébriques réelles, passer de l'une à l'autre afin d'exploiter les avantages respectifs de ces deux outils.

Enfin, nous pouvons espérer que le modèle du groupe à deux éléments nous inspirera pour l'extraction des nombres de Betti virtuels équivariants dans le cas d'un groupe fini quelconque. Comme nous l'avons vu, le cas d'un groupe d'ordre impair est le cas simple, et celui d'un groupe cyclique (d'ordre pair) devrait fonctionner de façon similaire au cas du groupe $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Chapitre 6

Filtration par le poids équivariante sur la cohomologie équivariante des variétés algébriques réelles

C. McCrory et A. Parusiński ont défini une filtration par le poids sur l'homologie de Borel-Moore de l'ensemble des points réels des variétés algébriques réelles. Une interrogation légitime est de savoir s'il est possible de s'inspirer de leur démarche pour définir une filtration similaire sur une certaine cohomologie de ces espaces.

T. Limoges répond positivement à cette question dans [21]. Il associe en effet à toute variété algébrique réelle un certain complexe de cochaînes filtré dont la cohomologie est la cohomologie à supports compacts de la partie réelle de la variété. Ce complexe de poids cohomologique est un foncteur contravariant possédant des propriétés d'extension, d'acyclicité et d'additivité similaires à celles du complexe de poids homologique, et son unicité à quasi-isomorphisme filtré près est également donnée par le critère d'extension de F. Guillén et V. Navarro-Aznar. Pour le réaliser, T. Limoges dualise d'une certaine façon la filtration géométrique (homologique).

Soit G un groupe fini. On utilise alors la fonctorialité du complexe de poids cohomologique pour définir un complexe de poids cohomologique avec action sur la catégorie des G-variétés algébriques réelles. Puis, on lui applique un foncteur L_G cohomologique pour obtenir un complexe de poids cohomologique équivariant qui induit une filtration par le poids équivariante sur une certaine cohomologie équivariante de l'ensemble des points réels des G-variétés algébriques réelles. On montre ensuite des propriétés analogues au cadre homologique, notamment l'existence de suites spectrales convergeant pour certaines vers la cohomologie équivariante, pour d'autres vers les termes de la page 2 de la suite spectrale de poids cohomologique équivariante.

6.1 Filtration par le poids sur la cohomologie des variétés algébriques réelles

6.1.1 Contexte

Dans cette partie, suivant T. Limoges dans [21], on va étudier la cohomologie singulière à supports compacts des points réels des variétés algébriques réelles. Les catégories de variétés algébriques réelles prises en compte sont toujours les catégories des schémas réduits séparés de type fini sur $\mathbb{R}$ et des morphismes propres réguliers, et on conserve les notations $\mathbf{Sch}_c(\mathbb{R})$, $\mathbf{Reg}_{comp}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{R})$.

Si X est une variété algébrique réelle de $\mathbf{Sch}_c(\mathbb{R})$, on note $C^*(X)$ le complexe des cochaînes semi-algébriques dual du complexe $C_*(X)$ des chaînes semi-algébriques à supports fermés de l'ensemble $\underline{X}$ des points réels de X :

$$(C^*(X), \delta^*) := (C_*(X), \partial_*)^{\vee},$$

i.e. pour tout p, $C^p(X) = Hom_{\mathbb{Z}_2}(C_p(X), \mathbb{Z}_2)$, et si $\varphi \in C^p(X)$, $\delta^p(\varphi) = \varphi \circ \partial_{p+1}$.

La cohomologie du complexe de cochaînes $C^*(X)$ est alors la cohomologie singulière à supports compacts $H^*_c(X)$ de $\underline{X}$ ([21]).

Les complexes que nous considérerons ici seront des complexes de cochaînes. On note ainsi $\mathfrak{C}$ la catégorie des complexes bornés de cochaînes de $\mathbb{Z}_2$-espaces vectoriels, munis d'une filtration décroissante bornée, et des morphismes de complexes filtrés.

Tout élément (K^*, F^*) de $\mathfrak{C}$ induit une suite spectrale $\{E_r, d_r\}$ qui converge vers la cohomologie du complexe K^*.

Comme dans le cadre homologique, on s'intéresse en particulier aux morphismes de $\mathfrak{C}$ qui induisent un isomorphisme sur E_1 (et donc sur les cohomologies), que l'on nomme quasi-isomorphisme de $\mathfrak{C}$, ou quasi-isomorphisme filtré. On note ensuite $H \circ \mathfrak{C}$ la catégorie $\mathfrak{C}$ localisée par rapport à de tels morphismes.

Par exemple, tout complexe de cochaînes borné K^* peut être muni d'une filtration canonique

$$F^p_{can} K^q = \begin{cases} K_q & \text{si } q < -p \\ ker\ \delta^q & \text{si } q = -p \\ 0 & \text{si } q > -p \end{cases}$$

et la suite spectrale induite converge dès la page 1 avec $E_1^{p,q} = \begin{cases} H^{p+q}(K^*) & \text{si } p+q = -p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (en particulier, un quasi-isomorphisme entre complexes bornés de cochaînes induit donc un quasi-isomorphisme filtré si on munit ceux-ci de la filtration canonique).

Enfin, de façon analogue au cadre homologique, on peut définir le complexe filtré simple associé à un diagramme cubique dans $\mathfrak{C}$ ([21]). On note $\mathfrak{s}$ cette opération.

6.1.2 Complexe de poids, filtration par le poids, suite spectrale de poids cohomologiques

En utilisant la version cohomologique du théorème (2.2.2) de [14], T. Limoges montre l'existence d'un complexe de cochaînes filtré de poids, extension du foncteur qui associe à une variété algébrique réelle projective lisse X le complexe de cochaînes $C^*(X)$ muni de la filtration canonique, unique (à quasi-isomorphisme filtré près) avec des propriétés d'acyclicité et d'additivité :

Théorème 6.1.1. ([21]) *Le foncteur contravariant*

$$F_{can}C^* : \mathbf{V}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{C} \ ; \ X \mapsto F_{can}C^*(X)$$

admet une extension en un foncteur contravariant

$$\mathcal{W}C^* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \to H \circ \mathfrak{C}$$

qui vérifie

1. *Acyclicité : Pour tout carré acyclique*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y} & \to & \widetilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \to & X \end{array}$$

le complexe filtré simple du $\square_1^+$-diagramme dans $\mathfrak{C}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W}C^*(\widetilde{Y}) & \leftarrow & \mathcal{W}C^*(\widetilde{X}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{W}C^*(Y) & \leftarrow & \mathcal{W}C^*(X) \end{array}$$

est acyclique.

2. *Additivité : Pour une inclusion fermée $Y \subset X$, le complexe filtré simple du $\square_0^+$-diagramme dans $\mathfrak{C}$*

$$\mathcal{W}C^*(Y) \leftarrow \mathcal{W}C^*(X)$$

est isomorphe (dans $H \circ \mathfrak{C}$) à $\mathcal{W}C^*(X \setminus Y)$.

Un tel foncteur $\mathcal{W}C^*$ est unique à un isomorphisme de $H \circ \mathfrak{C}$ unique près.

Pour une variété algébrique réelle X de $\mathbf{Sch}_c(\mathbb{R})$, le complexe de poids cohomologique $\mathcal{W}C^*(X)$ de X calcule la cohomologie à supports compacts $H_c^*(X)$ de X sur laquelle on obtient ainsi une filtration :

Définition 6.1.2. *La filtration*

$$H_c^k(X) = \mathcal{W}^{-k}H_c^k(X) \supset \cdots \supset \mathcal{W}^0 H_c^k(X) \supset \mathcal{W}^1 H_c^k(X) = \{0\}$$

sur $H_c^k(X)$, induite par la filtration sur $\mathcal{W}C^*(X)$, est appelée filtration par le poids cohomologique de X.

On note également E_r la suite spectrale, dite de poids, induite par le complexe filtré $\mathcal{W}C^*(X)$, qui converge donc vers la cohomologie à supports compacts de (l'ensemble des points réels de) X.

A l'instar du cadre homologique de C. McCrory et A. Parusiński dans [26], T. Limoges retrouve dans [21] les nombres de Betti virtuels à partir de la suite spectrale de poids cohomologique. En effet, en posant $\widetilde{E}_r^{p,q} = E_{r-1}^{-q,p+2q}$, on obtient

Proposition 6.1.3. ([21]) *Pour tout $X \in \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R})$, on a*

$$\beta_q(X) = \sum_{p=0}^{\dim X} (-1)^p \dim_{\mathbb{Z}_2} \widetilde{E}_2^{p,q}(X)$$

pour tout q.

6.1.3 Réalisations du complexe de poids cohomologique

Dans [21], T. Limoges réalise tout d'abord la suite spectrale de poids cohomologique par la suite spectrale associée à une hyperrésolution cubique :

Proposition 6.1.4. ([21]) *Soit X une variété algébrique réelle. Si $E_r(C^*, \widehat{F})$ est la suite spectrale associée à une hyperrésolution cubique de X, alors, pour $r \geq 2$, on a*

$$\widetilde{E}_r^{a,b} = E_r^{a,b}(C^*, \widehat{F})$$

pour tous a, b.

Ensuite, il dualise la filtration géométrique, puis plus tard la filtration Nash-constructible, afin d'obtenir un foncteur réalisant, dès le niveau des cochaînes, le complexe de poids cohomologique $\mathcal{W}C^*$, et son extension sur $\mathcal{X}_{\mathcal{AS}}$:

Définition 6.1.5. *Soit $X \in \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R})$. Pour tout p et tout q, on définit*

$$\mathcal{G}^p C^q(X) = \{\varphi \in C^q(X) \mid \varphi \equiv 0 \text{ sur } \mathcal{G}_{p-1} C_q(X)\}.$$

On a ainsi une filtration décroissante sur $C^*(X)$:

$$C^k(X) = \mathcal{G}^{-k} C^k(X) \supset \cdots \supset \mathcal{G}^0 C^k(X) \supset \mathcal{G}^1 C^k(X) = \{0\},$$

qui réalise le complexe de poids cohomologique :

Proposition 6.1.6. ([21]) *La filtration géométrique duale $\mathcal{G}C^* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \to \mathfrak{C}$ induit le foncteur $\mathcal{W}C^* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \to H \circ \mathfrak{C}$.*

Idée de démonstration. T. Limoges montre tout d'abord que les suites

$$0 \to \mathcal{G}^p C^q(X \setminus Y) \to \mathcal{G}^p C^q(X) \to \mathcal{G}^p C^q(Y) \to 0,$$

pour une inclusion fermée $Y \subset X$, et

$$0 \to \mathcal{G}^p C^q(X) \to \mathcal{G}^p C^q(\widetilde{X}) \oplus \mathcal{G}^p C^q(Y) \to \mathcal{G}^p C^q(\widetilde{Y}) \to 0,$$

pour un carré acyclique, sont exactes, en utilisant l'exactitude des suites induites par la filtration géométrique (homologique) et la dualité $\mathcal{G}^pC^q(X) \cong \left(\frac{C_q(X)}{\mathcal{G}_{q-1}C_q(X)}\right)^\vee$.

Pour X une variété algébrique réelle projective lisse, il utilise ensuite le quasi-isomorphisme $\mathcal{G}_{p-1}C_*(X) \to F^{can}_{p-1}C_*(X)$ dans $\mathcal{C}$ qui induit, par dualité, un quasi-isomorphisme $\mathcal{G}_pC^*(X) \leftarrow \left(F^{can}_{p-1}\right)^\vee C^*(X)$ dans $\mathfrak{C}$, (où $\left(F^{can}_{p-1}\right)^\vee C^q(X) = \{\varphi \in C^q(X) \mid \varphi \equiv 0 \text{ sur } F^{can}_{p-1}C_*(X)\}$), avant de montrer que les inclusions $F^p_{can}C^q(X) \subset \left(F^{can}_{p-1}\right)^\vee C^q(X)$ induisent un quasi-isomorphisme filtré.

□

Remarque 6.1.7. Notons que les relations de dualité

$$\frac{\mathcal{G}^pC^q(X)}{\mathcal{G}^{p+1}C^q(X)} = \left(\frac{\mathcal{G}_pC_q(X)}{\mathcal{G}_{p-1}C_q(X)}\right)^\vee$$

entre la filtration géométrique duale et la filtration géométrique induisent donc des relations

$$\frac{\mathcal{W}^pH^q_c(X)}{\mathcal{W}^{p+1}H^q_c(X)} = \left(\frac{\mathcal{W}_pH_q(X)}{\mathcal{W}_{p-1}H_q(X)}\right)^\vee$$

et

$$\mathcal{W}^pH^q_c(X) = \{\varphi \in H^q_c(X) \mid \varphi \equiv 0 \text{ sur } \mathcal{W}_{p-1}H_q(X)\}$$

entre les filtrations par le poids cohomologique et homologique.

De même, les suites spectrales de poids cohomologique et homologique sont duales l'une de l'autre :

$$E^{p,q}_r = (E^r_{p,q})^\vee$$

(pour $r \geq 0$ si on représente les complexes de poids par les filtrations géométriques).

On peut définir de la même façon une filtration $\mathcal{N}$ sur le complexe des cochaînes semi-algébriques $C^*(T)$ d'un ensemble $\mathcal{AS}$ T, duale de la filtration Nash-constructible $\mathcal{N}$ sur son complexe des chaînes semi-algébriques :

Définition 6.1.8. *Soit T un ensemble $\mathcal{AS}$ de $\mathcal{X}_{\mathcal{AS}}$. Pour tout p et tout q, on définit*

$$\mathcal{N}^pC^q(T) = \{\varphi \in C^q(T) \mid \varphi \equiv 0 \textit{ sur } \mathcal{N}_{p-1}C_q(X)\}.$$

Cette filtration Nash-constructible duale étend la filtration géométrique duale $\mathcal{G}C^* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \to \mathfrak{C}$ à la catégorie $\mathcal{X}_{\mathcal{AS}}$ des ensembles $\mathcal{AS}$.

6.2 Complexe de poids cohomologique avec action

Soit G un groupe fini.

On construit un foncteur qui à toute G-variété algébrique réelle associe son complexe de poids cohomologique que l'on munit de l'action de G induite par fonctorialité. De façon analogue au cadre homologique, on utilise la version avec action 3.2.1 du théorème de Guillén et Navarro Aznar pour montrer son unicité avec les propriétés d'acyclicité, d'additivité et d'extension du foncteur qui associe à toute G-variété algébrique réelle projective non singulière son complexe de cochaînes semi-algébriques muni de la filtration canonique et de l'action de G induite par fonctorialité.

Dans la suite, on définira et on appliquera à ce complexe de poids cohomologique avec action un foncteur L_G, afin obtenir un complexe de poids équivariant cohomologique qui induira une filtration dite par le poids équivariante sur une certaine cohomologie équivariante des variétés algébriques réelles.

6.2.1 Contexte

On reprend les notations $\mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$, $\mathbf{Reg}_{comp}^G(\mathbb{R})$ et $\mathbf{V}^G(\mathbb{R})$ pour désigner les catégories de variétés algébriques réelles avec action algébrique de G avec lesquelles on va travailler.

On note également

- $\mathfrak{C}^G$ la catégorie des G-complexes de cochaînes bornés de $\mathbb{Z}_2$-espaces vectoriels munis d'une filtration décroissante bornée par des G-complexes de cochaînes avec inclusions équivariantes, et des morphismes de complexes filtrés équivariants,
- $\mathfrak{D}^G$ la catégorie des G-complexes de cochaînes bornés de $\mathbb{Z}_2$-espaces vectoriels, et des morphismes de complexes de cochaînes équivariants.

Comme dans le cadre homologique, l'action de G sur un complexe de $\mathfrak{D}^G$ induit une action naturelle sur sa cohomologie, et la suite spectrale E_r associée à tout complexe filtré (K^*, F^*) de $\mathfrak{C}^G$ peut être munie naturellement de l'action induite de G.

A titre d'exemple, citons la filtration canonique cohomologique qui, lorsqu'on en munit un G-complexe de cochaînes borné, fournit un élément de $\mathfrak{C}^G$. De même, le complexe filtré simple associé à un diagramme cubique dans $\mathfrak{C}^G$ peut être muni de l'action de G induite et devenir ainsi un élément de $\mathfrak{C}^G$.

On termine enfin cette introduction en définissant la notion de quasi-isomorphisme de $\mathfrak{C}^G$:

Définition 6.2.1. *Un quasi-isomorphisme de $\mathfrak{C}^G$ est un morphisme de $\mathfrak{C}^G$ qui induit un isomorphisme sur E_1.*

On note $H \circ \mathfrak{C}^G$ la catégorie $\mathfrak{C}^G$ localisée par rapport aux quasi-isomorphismes de $\mathfrak{C}^G$.

6.2.2 Existence et unicité du complexe de poids cohomologique avec action

Soit X une G-variété algébrique réelle de $\mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$. On peut alors munir (de façon fonctorielle) le complexe $C^*(X)$ d'une action de G (et donc également la cohomologie singulière à supports compacts $H_c^*(X)$ de l'ensemble des points réels de X) induite par la fonctorialité de $C^* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \to \mathfrak{D}$ ($= {}^\vee \circ (C_* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \to \mathcal{D})$).

On obtient ainsi un foncteur :

$$C^* : \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R}) \to \mathfrak{D}^G.$$

En munissant $C^*(X)$ de la filtration canonique, on obtient un foncteur à valeurs dans la catégorie filtrée $\mathfrak{C}^G$:

$$F_{can}C^* : \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R}) \to \mathfrak{C}^G.$$

De la même façon, la fonctorialité du complexe de poids cohomologique de T. Limoges nous fournit un complexe de poids cohomologique avec action de G :

Théorème 6.2.2. *Le foncteur*

$$F_{can}C^* : \mathbf{V}^G(\mathbb{R}) \longrightarrow H \circ \mathfrak{C}^G \; ; \; X \mapsto F_{can}C^*(X)$$

admet une extension en un foncteur

$${}^G\mathcal{W}C^* : \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R}) \longrightarrow H \circ \mathfrak{C}^G$$

défini pour toutes les G-variétés algébriques réelles et tous les morphismes propres réguliers équivariants, qui vérifie les propriétés suivantes :

1. *Acyclicité : Pour tout carré acyclique dans $\mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$, le complexe filtré simple du $\square_1^+$-diagramme dans $\mathfrak{C}^G$*
$$\begin{array}{ccc} {}^G\mathcal{W}C^*(\widetilde{Y}) & \leftarrow & {}^G\mathcal{W}C^*(\widetilde{X}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ {}^G\mathcal{W}C^*(Y) & \leftarrow & {}^G\mathcal{W}C^*(X) \end{array}$$
est acyclique.
2. *Additivité : Pour une inclusion fermée équivariante $Y \subset X$, le complexe filtré simple du $\square_0^+$-diagramme dans $\mathfrak{C}^G$*
$${}^G\mathcal{W}C^*(Y) \leftarrow {}^G\mathcal{W}C^*(X)$$
est isomorphe à ${}^G\mathcal{W}C^*(X \setminus Y)$.

Un tel foncteur ${}^G\mathcal{W}C^*$ est unique à un isomorphisme de $H \circ \mathfrak{C}^G$ unique près.

Démonstration. **Existence :** La fonctorialité du complexe de poids cohomologique de T. Limoges fournit le complexe de poids cohomologique avec action ${}^G\mathcal{W}C^* : \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathfrak{C}^G$ qui vérifie alors les conditions d'extension, d'acyclicité et d'additivité demandées.

Unicité : On utilise le critère d'extension avec action 3.2.1. En effet, pour des raisons analogues à celles du cadre homologique,
- la catégorie $\mathfrak{C}^G$ est bien une catégorie de descente cohomologique,
- le foncteur $F_{can}C^* : \mathbf{V}^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathfrak{C}^G$ est ϕ-rectifié et vérifie les conditions (F1) et (F2) du théorème.

□

Définition 6.2.3. *Si X est une G-variété algébrique réelle, le G-complexe de cochaînes filtré ${}^G\mathcal{W}C^*(X)$ est appelé complexe de poids cohomologique avec action de X.*

Enfin, comme dans le cadre homologique, l'isomorphisme $H^*({}^G\mathcal{W}C^*(X)) \cong H_c^*(X)$ est équivariant, et la filtration par le poids sur la cohomologie à supports compacts de (l'ensemble des points réels de) la G-variété algébrique réelle X est munie de l'action induite de G, à l'instar de la suite spectrale de poids.

Précisons également que la filtration géométrique duale, munie de l'action de G induite par fonctorialité, réalise le complexe de poids cohomologique. En effet, le quasi-isomorphisme filtré $F_{can}C^*(X) \to \mathcal{G}C^*(X)$ pour X projective lisse est en particulier induit par des inclusions équivariantes, et est donc lui-même équivariant.

Dans la suite, le complexe de poids cohomologique d'une G-variété algébrique réelle X sera simplement noté $\mathcal{W}C^*(X)$ lorsque le contexte sera explicite.

6.3 Filtration par le poids cohomologique équivariante

Soit G un groupe fini.

Dans cette partie, on construit le pendant cohomologique du complexe de poids équivariant, afin d'obtenir une filtration par le poids sur la cohomologie équivariante des G-variétés algébriques réelles définie par J. van Hamel dans [35]. D'une façon très semblable à ce que l'on avait fait dans le cadre homologique, on va introduire un foncteur L_G sur la catégorie $\mathfrak{C}^G$ -ainsi que la cohomologie équivariante qu'il calcule et les outils, notamment les suites spectrales, qu'il apporte- et l'appliquer au complexe de poids cohomologique de T. Limoges (muni de l'action induite du groupe G) pour produire un complexe de poids cohomologique équivariant.

6.3.1 Le foncteur L_G

Le foncteur L_G va nous permettre de définir la cohomologie du groupe G à coefficients dans un G-complexe de cochaînes sur $\mathbb{Z}_2$. En particulier, si X est une G-variété algébrique réelle, la cohomologie du groupe G à coefficients dans le G-complexe $C^*(X)$ des cochaînes semi-algébriques de X sera précisément la cohomologie équivariante de X que nous considérerons. Cette cohomologie du groupe G vient elle aussi avec deux suites spectrales induites par le complexe double dont elle est la cohomologie du complexe total.

On note tout d'abord $\mathfrak{D}_+$ la catégorie des complexes de cochaînes bornés par le bas de $\mathbb{Z}_2$-espaces vectoriels, et $H \circ \mathfrak{D}_+$ la catégorie localisée par rapport aux quasi-isomorphismes.

Définition et Proposition 6.3.1. *Soit* $(K^*, \partial^*) \in \mathfrak{D}^G$. *Soit* $\cdots \to F_2 \xrightarrow{\Delta_2} F_1 \xrightarrow{\Delta_1} F_0 \to \mathbb{Z} \to 0$ *une résolution de* $\mathbb{Z}$ *par des* $\mathbb{Z}[G]$*-modules projectifs.*
On définit pour $k \in \mathbb{Z}$

$$L_G^k(K^*) := \bigoplus_{p+q=k} Hom_G(F_p, K^q),$$

et $\delta^k = \sum_{p+q=k} \delta^{p,q} : L_G^k(K^*) \to L_G^{k+1}(K^*)$ *avec*

$$\delta^{p,q} : \begin{array}{ccc} Hom_G(F_p, K^q) & \to & Hom_G(F_{p+1}, K^q) \oplus Hom_G(F_p, K^{q+1}) \\ u & \mapsto & u \circ \Delta_{p+1} \oplus \partial^q \circ u \end{array}.$$

Le couple $(L_G^*(K^*), \delta^*)$ *est alors un élément de* $\mathfrak{D}_+$. *Dans* $H \circ \mathcal{D}_+$, $(L_G^*(K^*), \delta^*)$ *est indépendant de la résolution de* $\mathbb{Z}$ *par des* $\mathbb{Z}[G]$*-modules projectifs choisie.*

Remarque 6.3.2. Pour $G = \{e\}$, on considère la résolution projective $\ldots \to 0 \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z}$ et alors $L^*_G(K^*) = K^*$.

L'opération qui à un G-complexe de cochaînes borné K^* associe le complexe de cochaînes borné par le bas $L^*_G(K^*)$ est fonctorielle. Il induit le foncteur covariant $L_G : \mathfrak{D}^G \to H \circ \mathfrak{D}_+$, indépendant de la résolution projective considérée, et on définit :

Définition 6.3.3. *Soit $(K^*, \partial^*) \in \mathfrak{D}^G$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note*

$$H^n(G, K^*) := H^n(L^*_G(K^*))$$

le n-ième groupe de cohomologie du groupe G à coefficients dans le G-complexe de cochaînes K^*.

Le complexe double $(Hom_G(F_p, K^q))_{p,q}$ induit deux suites spectrales qui convergent vers $H^*(G, K^*)$:

Proposition 6.3.4. *Pour tout G-complexe de cochaînes K^*, on a deux suites spectrales*

$${}_IE_2^{p,q} = H^p(G, H^q(K^*))$$

$${}_{II}E_1^{p,q} = H^p(G, K^q)$$

qui convergent toutes deux vers $H^{p+q}(G, K^*)$.

La suite spectrale ${}_IE_2$ est appelée suite spectrale de Hochschild-Serre cohomologique associée à G et K^*.

En particulier, un quasi-isomorphisme entre G-complexes de cochaînes induit un isomorphisme des suites de Hochschild-Serre associées. Le foncteur L_G préserve donc les quasi-isomorphismes, induisant un foncteur $L_G : H \circ \mathfrak{D}^G \to H \circ \mathfrak{D}_+$.

Remarquons également que la suite spectrale de Hochschild-Serre cohomologique nous indique que, nos complexes étant sur le corps $\mathbb{Z}_2$, l'on peut considérer des résolutions de $\mathbb{Z}_2$ par des $\mathbb{Z}_2[G]$-modules projectifs au lieu de résolutions projectives de $\mathbb{Z}$.

Remarque 6.3.5. Alors que la suite spectrale de Hochschild-Serre homologique était bornée à droite, la suite spectrale de Hochschild-Serre cohomologique est bornée à gauche : les termes d'abscisse $p < 0$ sont nuls. En particulier, la cohomologie d'un groupe à coefficients dans un G-complexe de cochaînes est donc nulle en degré strictement négatif, mais peut être non nulle en tout degré positif, même si le G-complexe lui-même est borné.

A l'instar du foncteur L homologique, l'opération L cohomologique est fonctorielle par rapport au groupe G :

Proposition 6.3.6. *Soient G' un autre groupe fini et $\varphi : G \to G'$ un morphisme de groupes. Soit $K^* \in \mathfrak{D}^{G'}$. Alors le complexe de cochaînes K^* peut être muni d'une structure de G-complexe via φ (en posant $g \cdot x := \varphi(g) \cdot x$), et φ induit un morphisme de $\mathfrak{D}_+$*

$$L^*_{G'}(K^*) \to L^*_G(K^*)$$

Démonstration. Preuve identique à celle de 4.1.16. □

Dans la suite, on montre que l'application du foncteur L_G à un complexe de cochaînes filtré borné donne un complexe de cochaînes filtré borné par le bas. Le foncteur L_G induit donc un foncteur (covariant) $\mathfrak{C}^G \to \mathfrak{C}_+$, où $\mathfrak{C}_+$ désigne la catégorie des complexes de cochaînes bornés par le bas de $\mathbb{Z}_2$-espaces vectoriels munis d'une filtration décroissante bornée, et des morphismes de complexes filtrés.

Préservant les quasi-isomorphismes filtrés, le foncteur L_G induit même un foncteur $H\circ\mathfrak{C}^G \to H \circ \mathfrak{C}_+$, où $H \circ \mathfrak{C}_+$ est la catégorie $\mathfrak{C}_+$ localisée par rapport aux quasi-isomorphismes filtrés, i.e. les morphismes qui induisent un isomorphisme entre les pages 1 des suites spectrales induites (chaque objet de $\mathfrak{C}_+$ induit une suite spectrale qui converge vers la cohomologie de celui-ci).

Remarque 6.3.7. Dans la suite, on écrira simplement L pour L_G lorsque le contexte sera explicite.

Proposition 6.3.8. *Soit $(K^*, J) \in \mathfrak{C}^G$. Soit $... \to F_2 \xrightarrow{\Delta_2} F_1 \xrightarrow{\Delta_1} F_0 \to \mathbb{Z} \to 0$ une résolution de $\mathbb{Z}$ par des $\mathbb{Z}[G]$-modules projectifs (ou $... \to F_2 \xrightarrow{\Delta_2} F_1 \xrightarrow{\Delta_1} F_0 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$ une résolution de $\mathbb{Z}_2$ par des $\mathbb{Z}_2[G]$-modules projectifs).*

La filtration décroissante bornée équivariante J du complexe K^* induit une filtration $\mathcal{J}$ sur $L^*(K^*)$ définie par

$$\mathcal{J}^\alpha L^k(K^*) := L^k(J^\alpha K^*).$$

Le complexe $L^*(K^*)$ muni de sa filtration $\mathcal{J}$ devient alors un élément de $\mathfrak{C}_+$ qui, dans $H \circ \mathfrak{C}_+$, est indépendant de la résolution choisie.

Démonstration. Pour tous $\alpha, p, q \in \mathbb{Z}$, $Hom_G(F_p, J^{\alpha+1}K^q)$ est un $\mathbb{Z}_2$-sous-espace vectoriel de $Hom_G(F_p, J^\alpha K^q)$: la filtration J induit donc bien une filtration décroissante bornée $\mathcal{J}$ sur le complexe de cochaînes $L^*(K^*) = \oplus_{p+q=*} Hom_G(F_p, K^q)$.

Soient maintenant $(F_i)_i$ et $(F'_j)_j$ deux résolutions projectives de $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}_2$) par des $\mathbb{Z}[G]$-modules (resp. $\mathbb{Z}_2[G]$-modules) projectifs. On note $\mathcal{J}L^*(K^*)$ et $\mathcal{J}'L'^*(K^*)$ les complexes de $\mathfrak{C}_+$ associés, et E_r et E'_r les suites spectrales induites respectivement par ces complexes filtrés.

On a

$$E_0^{p,q} = \frac{\mathcal{J}^p L^{p+q}}{\mathcal{J}^{p+1} L^{p+q}} = \frac{\bigoplus_{a+b=p+q} Hom_G(F_a, J^p K^b)}{\bigoplus_{a+b=p+q} Hom_G(F_a, J^{p+1} K^b)} = \bigoplus_{a+b=p+q} Hom_G\left(F_a, \frac{J^p K^b}{J^{p+1} K^b}\right)$$

(pour tout i, le foncteur $Hom_G(F_i, \cdot)$ est exact). Ainsi, pour tout p, $E_0^{p,*} = L^{p+*}\left(\frac{J^p K^*}{J^{p+1} K^*}\right)$. De même, pour tout p, $E_0'^{p,*} = L'^{p+*}\left(\frac{J^p K^*}{J^{p+1} K^*}\right)$. Ces deux complexes calculent la cohomologie du groupe G à valeurs dans le complexe de cochaînes $\frac{J^p K^*}{J^{p+1} K^*}$, et induisent donc un isomorphisme entre E_1 et E'_1.

□

Comme dans le cadre homologique, la fonctorialité de $L : \mathfrak{D}^G \to \mathfrak{D}_+$ induit celle de $L : \mathfrak{C}^G \to \mathfrak{C}_+$ et la préservation par L des quasi-isomorphismes filtrés induit un foncteur entre les catégories localisées par rapport à ceux-ci :

Proposition 6.3.9. *Le foncteur $L : \mathfrak{C}^G \to \mathfrak{C}_+$; $JK^* \mapsto \mathcal{J}L^*(K^*)$ induit un foncteur*

$$H \circ \mathfrak{C}^G \to H \circ \mathfrak{C}_+ \ ; \ JK^* \mapsto \mathcal{J}L^*(K^*)$$

que l'on note également L.

Démonstration. Soit $\varphi : JK^* \to IM^*$ un quasi-isomorphisme de $\mathfrak{C}^G$. On a, pour tous p, q, $E_{0\ (L^*(K^*))}^{p,q} = L^{p+q}\left(E_{0\ (K^*)}^{p,*-p}\right)$ et $E_{0\ (L^*(M^*))}^{p,q} = L^{p+q}\left(E_{0\ (M^*)}^{p,*-p}\right)$.

Or, pour tout p, le morphisme $\varphi : K^* \to M^*$ induit, par définition, un quasi-isomorphisme équivariant $E_{0\ (K^*)}^{p,*-p} \to E_{0\ (M^*)}^{p,*-p}$, et donc, par fonctorialité de $L_G : H \circ \mathfrak{D}^G \to H \circ \mathfrak{D}_+$, un quasi-isomorphisme $E_{0\ (L^*(K^*))}^{p,*-p} = L^*\left(E_{0\ (K^*)}^{p,*-p}\right) \to E_{0\ (L^*(M^*))}^{p,*-p} = L^*\left(E_{0\ (M^*)}^{p,*-p}\right)$. □

Remarque 6.3.10. De la même façon que pour le foncteur L homologique, la fonctorialité de L_G par rapport au groupe s'étend aux catégories filtrées : si G' est un autre groupe fini, alors tout morphisme de groupes $\varphi : G \to G'$ induira un morphisme $L^*_{G'}(K^*) \to L^*_G(K^*)$ de $\mathfrak{C}_+$ pour tout complexe de K^* de $\mathfrak{C}^{G'}$.

Enfin, pour terminer cette section, on établit que le foncteur L commute avec l'opération $\mathfrak{s}$ qui consiste à considérer le complexe simple filtré associé à un diagramme cubique dans $\mathfrak{C}^G$, resp. $\mathfrak{C}_+$. Cela nous permettra d'établir l'acyclicité et l'additivité du complexe de poids cohomologique équivariant, à partir de celle du complexe de poids cohomologique (avec action).

Proposition 6.3.11. *Le foncteur L commute avec l'opération $\mathfrak{s}$: soit $\mathfrak{K}$ un $\square_n^+$-diagramme cubique dans $\mathfrak{C}^G$, alors $\mathfrak{s}(L^*(\mathfrak{K})) = L^*(\mathfrak{s}\mathfrak{K})$.*

Démonstration. Preuve identique à celle du cadre homologique (4.2.7), à la différence près que l'on considère ici des complexes de cochaînes. □

6.3.2 Complexe de poids cohomologique équivariant

Le complexe filtré de poids cohomologique équivariant va induire une filtration par le poids sur la cohomologie équivariante suivante :

Définition 6.3.12. *Soit X une G-variété algébrique réelle de $\mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$. On note $C_G^*(X) := L_G^*(C^*(X))$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on associe à X*

$$H^n(X; G) := H^n(C_G^*(X)) = H^n(G, C^*(X)),$$

son n-ième groupe de cohomologie équivariante.

Remarque 6.3.13. Ces invariants cohomologiques sur $\mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$ sont fonctoriels, par fonctorialité de L_G. Rappelons également la suite spectrale de Hochschild-Serre cohomologique

$${}_I E_2^{p,q} = H^p(G, H_c^q(X)) \Rightarrow H^{p+q}(X; G),$$

qui coïncide, en tout cas sur les G-variétés algébriques réelles compactes, avec la suite spectrale de [35] Chapter III Proposition 5.1 : la cohomologie équivariante définie ci-dessus est donc la même que celle de J. van Hamel ([35] Chapter III Definition 1.1), du moins sur les G-variétés compactes.

Comme on l'avait fait dans le cadre homologique, le complexe de poids cohomologique équivariant est construit en composant ici le foncteur L_G et le foncteur ${}^G\mathcal{W}C^*$:

Définition 6.3.14. *Pour X une G-variété algébrique réelle, on note*

$$\mathcal{F}_{can}C^*_G(X) := L^*(F_{can}C^*(X))$$

et

$$\Omega C^*_G(X) := L^*(\mathcal{W}C^*(X)).$$

On appelle ce dernier complexe filtré de $H \circ \mathfrak{C}_+$ le complexe de poids cohomologique équivariant de X.

On obtient ainsi un foncteur (contravariant) avec des propriétés d'extension, d'acyclicité et d'additivité, unique par l'analogue équivariant 3.2.1 du critère d'extension de F. Guillén et V. Navarro Aznar, et dont on montrera de plus qu'il calcule la cohomologie équivariante :

Théorème 6.3.15.

$$\Omega C^*_G : \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathfrak{C}_+ \ ; \ X \mapsto \Omega C^*_G(X)$$

est un foncteur contravariant, extension du foncteur

$$\mathcal{F}_{can}C^*_G : \mathbf{V}^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathfrak{C}_+ \ ; \ X \mapsto \mathcal{F}_{can}C^*_G(X),$$

et qui vérifie les propriétés suivantes :

1. *Acyclicité : Pour tout carré acyclique dans $\mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$, le complexe filtré simple du $\square_1^+$-diagramme dans $\mathfrak{C}_+$*
$$\begin{array}{ccc} \Omega C^*_G(\widetilde{Y}) & \leftarrow & \Omega C^*_G(\widetilde{X}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Omega C^*_G(Y) & \leftarrow & \Omega C^*_G(X) \end{array}$$
est acyclique.
2. *Additivité : Pour une inclusion fermée équivariante $Y \subset X$, le complexe filtré simple du $\square_0^+$-diagramme dans $\mathfrak{C}_+$*
$$\Omega C^*_G(Y) \leftarrow \Omega C^*_G(X)$$
est isomorphe dans $H \circ \mathfrak{C}_+$ à $\Omega C^*_G(X \setminus Y)$.

De plus, tout autre foncteur $\mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathfrak{C}_+$ avec ces trois propriétés sera quasi-isomorphe dans $\mathfrak{C}_+$ à ΩC^*_G à un unique quasi-isomorphisme de $\mathfrak{C}_+$ près.

Démonstration. De façon analogue au cadre homologique, les propriétés fonctorielle, d'extension, d'acyclicité et d'additivité du foncteur $\mathcal{W}C^* : \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathfrak{C}^G$ induisent, par composition par le foncteur $L : H \circ \mathfrak{C}^G \to H \circ \mathfrak{C}_+$, les propriétés analogues sur $\Omega C^*_G : \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathfrak{C}_+$ ($\mathcal{F}_{can}C^*_G : \mathbf{V}^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathfrak{C}_+$ est la composition des foncteurs $F_{can}C^* : \mathbf{V}^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathfrak{C}^G$ et $L : H \circ \mathfrak{C}^G \to H \circ \mathfrak{C}_+$, et le foncteur L commute avec l'opération $\mathfrak{s}$ d'après la proposition 6.3.11).

Quant à l'unicité du foncteur ΩC^*_G avec ces propriétés, on utilise là aussi pour la montrer le critère d'extension équivariant 3.2.1. En effet, la catégorie $\mathfrak{C}_+$ est une catégorie de descente cohomologique (c'est une catégorie de complexes de cochaînes bornés par le bas et munis d'une filtration décroissante bornée), et le foncteur $\mathcal{F}_{can}C_G^* : \mathbf{V}^G(\mathbb{R}) \to H \circ \mathfrak{C}_+$ est Φ-rectifié et vérifie les conditions (F1) et (F2) du théorème 3.2.1 pour des raisons similaires à celles du pendant homologique.

□

Enfin, le complexe de poids cohomologique équivariant induit une filtration par le poids sur la cohomologie équivariante des G-variétés algébriques réelles en vertu de la proposition suivante :

Proposition 6.3.16. *Soit $X \in \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$. Le complexe de poids cohomologique équivariant $\Omega C_G^*(X)$ calcule la cohomologie équivariante de X : pour tout n, on a*

$$H^n(\Omega C_G^*(X)) = H^n(X;G).$$

Démonstration. Les foncteurs d'oubli de la filtration $\mathfrak{C}^G \to \mathfrak{D}^G$ et $\mathfrak{C}_+ \to \mathfrak{D}_+$ induisent respectivement les foncteurs $\psi^G : H \circ \mathfrak{C}^G \to H \circ \mathfrak{D}^G$ et $\psi_+ : H \circ \mathfrak{C}_+ \to H \circ \mathfrak{D}_+$.

On a $\psi_+ \circ \Omega C_G^* = L_G \circ (\psi^G \circ {}^G\mathcal{W}C^*)$. Comme le foncteur $\psi^G \circ {}^G\mathcal{W}C^*$ est quasi-isomorphe à C^* dans $\mathfrak{D}^G$, le foncteur $L_G \circ (\psi^G \circ {}^G\mathcal{W}C^*)$ est quasi-isomorphe dans $\mathfrak{D}_+$ à $L_G \circ C^* = C_G^*$.

D'où, pour tout $X \in \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$ et pour tout n,

$$H^n(\Omega C_G^*(X)) = H^n(L_G(C^*(X)) = H^n(X;G).$$

□

6.3.3 Suite spectrale de poids cohomologique équivariante et filtration par le poids cohomologique équivariante

Soit X une G-variété algébrique réelle. Le complexe de poids cohomologique équivariant $\Omega C_G^*(X)$ induit une suite spectrale (cohomologique) que l'on note ${}^GE_r(X)$, appelée suite spectrale de poids cohomologique équivariante associée à X.

Cette suite spectrale converge vers la cohomologie équivariante de la G-variété algébrique réelle X et induit sur celle-ci une filtration notée Ω, que l'on appelle filtration par le poids cohomologique équivariante de X.

En réindexant cette suite spectrale en posant $p' = 2p + q$, $q' = -p$ et $r' = r + 1$, on obtient une nouvelle suite spectrale, notée ${}^G\widetilde{E}_{r'}$. On lit les conditions d'acyclicité et d'additivité du complexe de poids cohomologique équivariant en termes de suites exactes longues sur les lignes de la page 2 de cette suite spectrale réindexée.

De plus, en remarquant que les termes de cette même page peuvent s'exprimer comme la cohomologie du groupe G à valeurs dans la suite spectrale de poids cohomologique, on en déduit deux suites spectrales qui y convergent :

Proposition 6.3.17. *Pour tous p, q, on a*

$${}^G\widetilde{E}_2^{p,q} = H^p\left(G, \widetilde{E}_1^{*,q}\right).$$

Pour tout q, on a donc deux suites spectrales

$$ {}^{q}_{I}E_2^{\alpha,\beta} = H^{\alpha}\left(G, \widetilde{E}_2^{\beta,q}\right) $$

et

$$ {}^{q}_{I}E_1^{\alpha,\beta} = H^{\alpha}\left(G, \widetilde{E}_1^{\beta,q}\right) $$

qui convergent toutes deux vers ${}^{G}\widetilde{E}_2^{\alpha+\beta,q}$.

Démonstration. Pour tous p, q, on a

$$ {}^{G}E_1^{p,q} = H^{p+q}\left({}^{G}E_0^{p,*-p}\right) = H_{p+q}\left(L_*\left(E_0^{p,*-p}\right)\right) = H^{p+q}\left(G, E_0^{p,*-p}\right) $$

(en utilisant les calculs de 6.3.9).

Quant aux suites spectrales, ce sont les suites spectrales associées à la cohomologie du groupe G à valeurs dans les G-complexes de cochaînes $\widetilde{E}_1^{*,q}$ (6.3.4). □

On déduit en particulier de ceci les "bornes" de la suite spectrale de poids cohomologique équivariante, et incidemment celles de la filtration par le poids cohomologique équivariante :

Corollaire 6.3.18. *Soit X est une G-variété algébrique réelle de dimension d. Pour tous $r \geq 2$, p, q, si ${}^{G}\widetilde{E}_r^{p,q} \neq 0$, alors $0 \leq q \leq d$ et $p \geq 0$.*

Ainsi, la filtration par le poids équivariante cohomologique de X sur la cohomologie équivariante de X est "uniformément" bornée : pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$ H^k(X;G) = \Omega^{-d}H^k(X;G) \supset \Omega^{-d+1}H^k(X;G) \supset \cdots \supset \Omega^{0}H^k(X;G) \supset \Omega^{1}H^k(X;G) = 0. $$

Démonstration. Pour tous p, q, on a

$$ {}^{G}\widetilde{E}_2^{p,q} = \bigoplus_{\alpha+\beta=p} {}^{q}_{I}E_{\infty}^{\alpha,\beta}, $$

avec ${}^{q}_{I}E_2^{\alpha,\beta} = H^{\alpha}\left(G, \widetilde{E}_2^{\beta,q}\right)$. Ainsi, si $q < 0$ ou $q > d$, pour tous α, β, on a ${}^{q}_{I}E_2^{\alpha,\beta} = 0$. De plus, si $p < 0$, pour tous α et β tels que $\alpha + \beta = p$, on a $\alpha + \beta < 0$, et donc soit $\beta < 0$ et alors $\widetilde{E}_2^{\beta,q} = 0$, soit $\beta \geq 0$ et alors $\alpha < 0$ donc ${}^{q}_{I}E_2^{\alpha,\beta} = 0$.

Enfin, pour tous p, k, on a

$$ \Omega^{p}H^k(X;G) = \bigoplus_{q \geq 0} {}^{G}E_{\infty}^{p+q,k-p-q} = \bigoplus_{q \geq 0} {}^{G}\widetilde{E}_{\infty}^{k+p+q,-(p+q)}. $$

Ainsi $\Omega^{1}H^k(X;G) = \bigoplus_{q\geq 0} {}^{G}\widetilde{E}_{\infty}^{k+q+1,-q-1} = 0$ et $\Omega^{-d}H^k(X;G) = \bigoplus_{q \geq 0} {}^{G}\widetilde{E}_{\infty}^{k+d+q,-q+d)} = H^k(X;G)$.

□

Remarque 6.3.19. Comme dans le cadre homologique,

- Si X est une G-variété réelle compacte et non singulière, la suite spectrale de poids cohomologique équivariante de X coïncide avec la suite spectrale de Hochschild-Serre cohomologique associée à X.
- Si G est un groupe d'ordre impair, les complexe de poids cohomologique, suite spectrale de poids cohomologique, et filtration par le poids cohomologique équivariants consistent en les invariants sous les actions de G induites sur leurs analogues non-équivariants.
- La composition de la filtration géométrique duale avec action (qui réalise le complexe de poids cohomologique avec action) avec le foncteur L_G réalise le complexe de poids cohomologique équivariant. On note ΛC_G^* la composition de ces deux foncteurs.

Chapitre 7

Produits de filtrations par le poids équivariantes

Dans ce chapitre, après avoir rappelé les premiers résultats de T. Limoges sur les produits de filtrations par le poids pour les variétés algébriques réelles ([21]), on traite le cas avec action : si G et G' sont deux groupes finis, X une G-variété algébrique réelle et Y une G'-variété algébrique réelle, alors le quasi-isomorphisme filtré entre le produit des filtrations géométriques $\mathcal{G}C_*(X) \otimes \mathcal{G}C_*(Y)$ et la filtration géométrique de la variété produit $\mathcal{G}C_*(X \times Y)$ est équivariant par rapport aux actions du groupe produit $G \times G'$ induites.

On applique ensuite à ce quasi-isomorphisme filtré équivariant le foncteur $L^{G \times G'}$ pour obtenir un quasi-isomorphisme filtré entre $\Lambda C_*^G(X) \otimes \Lambda C_*^{G'}(Y)$ et $\Lambda C_*^{G \times G'}(X \times Y)$, après avoir montré que, si l'on considérait des résolutions projectives particulières B et B' de G et G' respectivement, on avait $L^G(K) \otimes L^{G'}(M) = L^{G \otimes G'}(K \otimes M)$ pour tout G-complexe filtré K et tout G'-complexe filtré M.

Enfin, sont établis également les pendants cohomologiques de ces propriétés.

7.1 Produits de filtrations par le poids

Dans [21], T. Limoges étudie les relations entre les complexes de poids de deux variétés algébriques réelles et le complexe de poids de la variété produit associée, via la filtration géométrique. Il en déduit les relations induites sur les suites spectrales de poids, et enfin que l'isomorphisme de Künneth sur les homologies est un isomorphisme filtré par rapport à la filtration par le poids. En particulier, il montre ainsi sans utiliser le théorème de factorisation faible que le polynôme de Poincaré virtuel est multiplicatif. Enfin, T. Limoges obtient des résultats similaires dans le cadre cohomologique.

Soient $X,\ Y \in \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R})$. Pour débuter son étude, T. Limoges commence par définir un produit sur les chaînes semi-algébriques à supports fermés :

Définition 7.1.1. *Pour $c = [A] \in C_q(X)$ et $c' = [B] \in C_{q'}(Y)$, le produit $c \times c'$ est défini par*

$$c \times c' := [A \times B] \in C_{q+q'}(X \times Y)$$

Cette opération est compatible avec la filtration géométrique en le sens suivant :

Proposition 7.1.2. *1. Si $c \in \mathcal{G}_p C_q(X)$ et $c' \in \mathcal{G}_{p'} C_{q'}(Y)$,*

$$c \times c' \in \mathcal{G}_{p+p'} C_{q+q'}(X \times Y).$$

2. Si $c \in C_q(X)$, $c' \in C_{q'}(Y)$ et $c \times c' \in \mathcal{G}_s C_{q+q'}(X \times Y)$, il existe p, p' avec $p + p' = s$ tels que

$$c \in \mathcal{G}_p C_q(X) et\ c' \in \mathcal{G}_{p'} C_{q'}(Y).$$

3. Si $c \in \mathcal{G}_p C_q(X) \setminus \mathcal{G}_{p-1} C_q(X)$ et $c' \in \mathcal{G}_{p'} C_{q'}(Y) \setminus \mathcal{G}_{p'-1} C_{q'}(Y)$,

$$c \times c' \in \mathcal{G}_{p+p'} C_{q+q'}(X \times Y) \setminus \mathcal{G}_{p+p'-1} C_{q+q'}(X \times Y).$$

Le résultat de T. Limoges consiste à relier par un quasi-isomorphisme filtré le produit des filtrations géométriques de deux variétés algébriques réelles à la filtration géométrique de la variété produit. Etablissons donc tout d'abord la définition du produit de complexes filtrés :

Définition 7.1.3. *Soient (FK_*, ∂_*) et (JM_*, ∂'_*) deux complexes filtrés de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}_-$). On définit le complexe filtré $((F \otimes J)(K_* \otimes M_*), \partial \otimes \partial')$ (ou $(FK_* \otimes JM_*, \partial \otimes \partial')$) de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}_-$) par*

$$\forall n,\ (K_* \otimes M_*)_n := \bigoplus_{i+j=n} K_i \otimes_{\mathbb{Z}_2} M_j,$$

la différentielle $\partial \otimes \partial'$ étant donnée par $(\partial \otimes \partial')_n(\sum_{i,j} x_i \otimes y_j) = \sum_{i,j} (\partial_i(x_i) \otimes y_j + x_i \otimes \partial'_j(y_j))$, et

$$(F \otimes J)_p(K_* \otimes M_*)_n = \bigoplus_{i+j=n} \sum_{a+b=p} F_a K_i \otimes_{\mathbb{Z}_2} J_b M_j.$$

T. Limoges montre alors :

Théorème 7.1.4. ([21]) *On a un quasi-isomorphisme de complexes filtrés*

$$u : \mathcal{G}C_*(X) \otimes \mathcal{G}C_*(Y) \to \mathcal{G}C_*(X \times Y)\ ;\ c_X \otimes c_Y \mapsto c_X \times c_Y.$$

D'où la conséquence dans $H \circ \mathcal{C}$ pour tous les représentants du complexe de poids :

Corollaire 7.1.5. *Les complexes filtrés $\mathcal{W}C_*(X) \otimes \mathcal{W}C_*(Y)$ et $\mathcal{W}C_*(X \times Y)$ sont quasi-isomorphes dans $\mathcal{C}$, et le quasi-isomorphisme u induit un isomorphisme sur les homologies, filtré par rapport aux filtrations par le poids :*

$$\mathcal{W}H_*(X) \otimes \mathcal{W}H_*(Y) \to \mathcal{W}H_*(X \times Y).$$

Afin de montrer ces résultats et de les interpréter au niveau des suites spectrales, on a besoin de :

Proposition 7.1.6. *Si (FK_*, ∂_*) et (JM_*, ∂'_*) sont deux complexes filtrés de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}_-$), la suite spectrale de leur produit vérifie, pour $r \geq 0$,*

$$E^r_{a,b}(K_* \otimes M_*) \cong \bigoplus_{p+s=a, q+t=b} E^r_{p,q}(K_*) \otimes E^r_{s,t}(M_*).$$

Avant de donner la preuve de cette proposition, on rappelle le théorème de l'isomorphisme de Künneth que l'on utilisera :

Théorème 7.1.7. *Soient K_* et M_* deux complexes de chaînes. Alors on a un isomorphisme*

$$H_*(K_*) \otimes H_*(M_*) \to H_*(K_* \otimes M_*),$$

appelé isomorphisme de Künneth, où $\left(H_*(K_*) \otimes H_*(M_*)\right)_n = \oplus_{i+j=n} H_i(K_*) \oplus H_j(M_*)$.

Démonstration. Soient $a,\ b \in \mathbb{Z}$, alors

$$\begin{aligned}
E^0_{a,b}(K_* \otimes M_*) &= \frac{(F \otimes J)_a (K \otimes M)_{a+b}}{(F \otimes J)_{a-1} (K \otimes M)_{a+b}} \\
&= \bigoplus_{i+j=a+b} \frac{\sum_{\alpha+\beta=a} F_\alpha K_i \otimes J_\beta M_j}{\sum_{\alpha+\beta=a-1} F_\alpha K_i \otimes J_\beta M_j} \\
&= \bigoplus_{i+j=a+b} \bigoplus_{\alpha+\beta=a} \frac{F_\alpha K_i}{F_{\alpha-1} K_i} \otimes \frac{J_\beta M_j}{J_{\beta-1} M_j} \\
&= \bigoplus_{\alpha+\beta=a} \bigoplus_{i+j=a+b} E^0_{\alpha,i-\alpha}(K_*) \otimes E^0_{\beta,j-\beta}(M_*) \\
&= \bigoplus_{p+s=a,q+t=b} E^0_{p,q}(K_*) \otimes E^0_{s,t}(M_*) \text{ (en posant } p := \alpha,\ s := \beta,\ q := i-\alpha,\ t := j-\beta) \\
&= \bigoplus_{p+s=a} \left(E^0_{p,*} \otimes E^0_{s,*}\right)_b .
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
E^1_{a,b}(K_* \otimes M_*) &= H_b\left(E^0_{a,*}(K_* \otimes M_*)\right) \\
&= \bigoplus_{p+s=a} H_b\left(\left(E^0_{p,*}(K_*) \otimes E^0_{s,*}(M_*)\right)_*\right) \\
&= \bigoplus_{p+s=a} \bigoplus_{q+t=b} H_q\left(E^0_{p,*}(K_*)\right) \otimes H_t\left(E^0_{s,*}(M_*)\right) \text{ (par l'isomorphisme de Künneth)} \\
&= \bigoplus_{p+s=a,q+t=b} E^1_{p,q}(K_*) \otimes E^1_{s,t}(M_*),
\end{aligned}$$

et on a ensuite par récurrence, et en utilisant à nouveau l'isomorphisme de Künneth,

$$E^r_{a,b}(K_* \otimes M_*) = \bigoplus_{p+s=a,q+t=b} E^r_{p,q}(K_*) \otimes E^r_{s,t}(M_*).$$

□

Remarque 7.1.8. On a de plus

$$\bigoplus_{u+v=n,u\leq k} E^\infty_{u,v}(K \otimes M) = (F \otimes J)_k (H_*(K) \otimes H_*(M))_n,$$

car en effet,

$$\begin{aligned}\bigoplus_{u+v=n,u\leq k} E^{\infty}_{u,v}(K\otimes M) &= \bigoplus_{u+v=n,u\leq k}\ \bigoplus_{p+s=u,q+t=v} E^{\infty}_{p,q}(K_*)\otimes E^{\infty}_{s,t}(M_*)\\ &= \bigoplus_{u\leq k}\bigoplus_{p,q} E^{\infty}_{p,q}(K_*)\otimes E^{\infty}_{u-p,n-u-q}(M_*),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(F\otimes J)_k(H_*(K)\otimes H_*(M))_n &= \bigoplus_{u'+v'=n}\ \sum_{\alpha+\beta=k} F_\alpha H_{u'}(K)\otimes J_\beta H_{v'}(M)\\ &= \bigoplus_{u'+v'=n}\ \sum_{\alpha+\beta=k}\left(\bigoplus_{p+q=u',p\leq\alpha} E^{\infty}_{p,q}(K)\right)\otimes\left(\bigoplus_{p'+q'=v',p'\leq\beta} E^{\infty}_{p',q'}(M)\right)\\ &= \bigoplus_{u'+v'=n}\ \sum_{\alpha+\beta=k}\ \bigoplus_{p+q=u',p\leq\alpha}\ \bigoplus_{p'+q'=v',p'\leq\beta} E^{\infty}_{p,q}(K)\otimes E^{\infty}_{p',q'}(M)\\ &= \bigoplus_{u'}\sum_{\alpha}\bigoplus_{p\leq\alpha}\ \bigoplus_{p'\leq k-\alpha} E^{\infty}_{p,u'-p}(K)\otimes E^{\infty}_{p',n-u'-p'}(M)\\ &= \bigoplus_{u'}\ \bigoplus_{p+p'\leq k} E^{\infty}_{p,u'-p}(K)\otimes E^{\infty}_{p',n-u'-p'}(M)\\ &= \bigoplus_{u\leq k}\bigoplus_{p,q} E^{\infty}_{p,q}(K_*)\otimes E^{\infty}_{u-p,n-u-q}(M_*)\ \text{(en posant } q:=u'-p,\ u:=p'+p).\end{aligned}$$

En combinant la propriété 7.1.6 avec le quasi-isomorphisme filtré 7.1.4, T. Limoges retrouve en particulier la multiplicativité du polynôme de Poincaré virtuel :

Corollaire 7.1.9. *Pour tout n,*

$$\beta_n(X\times Y)=\sum_{p+q=n}\beta_p(X)\beta_q(Y).$$

T. Limoges obtient également un quasi-isomorphisme filtré entre le produit des complexes de poids cohomologiques et le complexe de poids cohomologique du produit. Donnons tout d'abord un sens précis au produit tensoriel de complexes de cochaînes filtrés :

Définition 7.1.10. *Soient (FK^*,∂^*) et (JM^*,∂'^*) deux complexes filtrés de $\mathfrak{C}$ (resp. $\mathfrak{C}_+$). On définit le complexe de chaînes filtré $((F\otimes J)(K^*\otimes M^*),\partial\otimes\partial')$ (ou $(FK^*\otimes JM^*,\partial\otimes\partial')$) de $\mathfrak{C}$ (resp. $\mathfrak{C}_+$) par*

$$\forall n,\ (K^*\otimes M^*)_n:=\bigoplus_{i+j=n} K^i\otimes_{\mathbb{Z}_2} M^j,$$

la différentielle $\partial\otimes\partial'$ étant donnée par $(\partial\otimes\partial')^n(\sum_{i,j}x^i\otimes y^j)=\sum_{i,j}(\partial^i(x^i)\otimes y^j+x^i\otimes\partial'^j(y^j))$, et

$$(F\otimes J)^p(K^*\otimes M^*)^n=\bigoplus_{i+j=n}\ \sum_{a+b=p} F^aK^i\otimes_{\mathbb{Z}_2} J^bM^j.$$

Il est à noter que le quasi-isomorphisme filtré donné par T. Limoges dans la propriété suivante est obtenu, au niveau des cochaînes, à partir de deux quasi-isomorphismes filtrés allant dans des directions opposées :

Proposition 7.1.11. *Les complexes filtrés $\mathcal{G}C^*(X) \otimes \mathcal{G}C^*(Y)$ et $\mathcal{G}C^*(X \times Y)$ sont quasi-isomorphes dans $\mathfrak{C}$.*

Ainsi, les complexes filtrés $\mathcal{W}C^*(X) \otimes \mathcal{W}C^*(Y)$ et $\mathcal{W}C^*(X \times Y)$ sont isomorphes dans $H \circ \mathfrak{C}$, et l'isomorphisme de Künneth en cohomologie $\mathcal{W}H^*(X) \otimes \mathcal{W}H^*(Y)$ et $\mathcal{W}H^*(X \times Y)$ est filtré par rapport aux filtrations par le poids.

7.2 Produits avec action

En prenant appui sur les résultats de [21], on montre que si l'on se place dans un cadre avec actions de groupes finis, les morphismes qui relient le produit des complexes de poids et le complexe de poids du produit sont équivariants pour les actions induites, impliquant l'équivariance des morphismes induits sur les filtrations par le poids et les suites spectrales de poids.

Soient donc G, G' deux groupes finis.

On commence par rappeler que le produit tensoriel d'un $\mathbb{Z}[G]$-module et d'un $\mathbb{Z}[G']$-module est naturellement muni d'une action du groupe produit $G \times G'$:

Définition 7.2.1. *Soient E un $\mathbb{Z}[G]$-module (resp. $\mathbb{Z}_2[G]$-module) et F un $\mathbb{Z}[G']$-module (resp. $\mathbb{Z}_2[G']$-module). Alors le produit tensoriel $E \otimes_{\mathbb{Z}} F$ (resp. $E \otimes_{\mathbb{Z}_2} F$) est muni d'une structure de $\mathbb{Z}[G \times G']$-module (resp. $\mathbb{Z}_2[G \times G']$-module) en posant :*

$$(g, g').(x \otimes y) := g.x \otimes g'.y.$$

Remarque 7.2.2. Si $G' = G$, on peut également munir le produit tensoriel $E \otimes F$ d'une action de G en posant $g.(x \otimes y) := g.x \otimes g.y$.

Il en va de même pour le produit d'un G-complexe filtré et d'un G'-complexe filtré :

Proposition 7.2.3. *Soit (FK_*, ∂_*) un complexe filtré de $\mathcal{C}^G$ et (JM_*, ∂'_*) un complexe filtré de $\mathcal{C}^{G'}$. On peut alors munir le produit tensoriel $K_* \otimes M_*$ d'une action de $G \times G'$ en considérant l'action diagonale de $G \times G'$. La différentielle $\partial \otimes \partial'$ et la filtration $F_* \otimes J_*$ sont équivariantes par rapport à cette action, et $((F \otimes J)(K_* \otimes M_*), \partial \otimes \partial')$ devient ainsi un élément de $\mathcal{C}^{G \times G'}$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Soit $z = \sum_{i+j} x_i \otimes y_j \in (K_* \otimes M_*)_n$, et soit $(g, g') \in G \times G'$. Alors

$$(g, g').z := \sum_{i,j} g.x_i \otimes g'.y_j,$$

et on a

$$\begin{aligned}
(\partial \otimes \partial')_n((g,g').z) &= (\partial \otimes \partial')_n \left(\sum_{i,j} g.x_i \otimes g'.y_j \right) \\
&= \sum_{i,j} \left(\partial_i(g.x_i) \otimes g'.y_j + g.x_i \otimes \partial'_j(g'.y_j) \right) \\
&= \sum_{i,j} \left(g.\partial_i(x_i) \otimes g'.y_j + g.x_i \otimes g'.\partial'_j(y_j) \right) \\
&= \sum_{i,j} \left((g,g').(\partial_i(x_i) \otimes y_j) + (g,g').(x_i \otimes \partial'_j(y_j)) \right) \\
&= (g,g').(\partial \otimes \partial')_n(z).
\end{aligned}$$

□

Remarque 7.2.4. Si $G' = G$, on peut munir de la même façon le produit tensoriel $((F \otimes J)(K_* \otimes M_*), \partial \otimes \partial')$ d'une action de G via l'action de G décrite dans 7.2.2.

Soient maintenant $X \in \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathbf{Sch}_c^{G'}(\mathbb{R})$. Alors le groupe produit $G \times G'$ agit naturellement sur la variété produit $X \times Y$. On montre alors que le quasi-isomorphisme filtré 7.1.4 est équivariant pour les actions induites sur les filtrations géométriques.

Proposition 7.2.5. *Le quasi-isomorphisme filtré*

$$u : \mathcal{G}C_*(X) \otimes \mathcal{G}C_*(Y) \to \mathcal{G}C_*(X \times Y) \ ; \ c_X \otimes c_Y \mapsto c_X \times c_Y$$

est équivariant par rapport aux actions induites de $G \times G'$.

Démonstration. Soient $c_X \otimes c_Y = \sum_{i+j} c_i \otimes c'_j \in (\mathcal{G} \otimes \mathcal{G})_p(C_*(X) \otimes C_*(Y))_n$. Alors, pour tout $(g,g') \in G \times G'$,

$$\begin{aligned}
(g,g').u(c_X \otimes c_Y) &= (g,g'). \left(\sum_{i+j} c_i \times c'_j \right) \\
&= \sum_{i+j} (g,g').(c_i \times c'_j) \\
&= \sum_{i+j} (g.c_i \times g'.c'_j) \text{ (on a } (g,g').[A \times B] = [g.A \times g'.B] = [g.A] \times [g'.B]) \\
&= u \left(\sum_{i+j} (g.c_i \otimes g'.c'_j) \right) \\
&= u\left((g,g').(c_X \otimes c_Y) \right).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 7.2.6. *Les complexes filtrés avec action* ${}^G\mathcal{W}C_*(X) \otimes {}^{G'}\mathcal{W}C_*(Y)$ *et* ${}^{G\times G'}\mathcal{W}C_*(X \times Y)$ *sont quasi-isomorphes dans* $\mathcal{C}^{G\times G'}$*, et le quasi-isomorphisme équivariant* u *induit un isomorphisme filtré équivariant*

$$\mathcal{W}H_*(X) \otimes \mathcal{W}H_*(Y) \to \mathcal{W}H_*(X \times Y).$$

En montrant que les morphismes reliant le produit des filtrations géométriques duales et la filtration duale du produit sont équivariants, on montre qu'il en est de même dans le cadre cohomologique :

Proposition 7.2.7. *Les complexes filtrés avec action* ${}^G\mathcal{G}C^*(X) \otimes {}^{G'}\mathcal{G}C^*(Y)$ *et* ${}^{G\times G'}\mathcal{G}C^*(X \times Y)$ *sont quasi-isomorphes dans* $\mathfrak{C}^{G\times G'}$.

Ainsi, les complexes filtrés ${}^G\mathcal{W}C^*(X) \otimes {}^{G'}\mathcal{W}C^*(Y)$ *et* ${}^{G\times G'}\mathcal{W}C^*(X \times Y)$ *sont quasi-isomorphes dans* $\mathfrak{C}^{G\times G'}$*, et l'isomorphisme de Künneth en cohomologie* $\mathcal{W}H^*(X) \otimes \mathcal{W}H^*(Y)$ *et* $\mathcal{W}H^*(X \times Y)$ *est filtré et équivariant.*

Démonstration. On montre que les morphismes $u^\vee$ et w de [21] sont équivariants. Or, u étant équivariant, son image par le foncteur $^\vee$ est équivariante. De plus, si $\varphi \otimes \psi \in (C_*(X))^\vee \otimes (C_*(Y))^\vee$, pour tout $(g, g') \in G \times G'$ et tout $\sum_{i,j} c_i \otimes c'_j \in C_*(X) \otimes C_*(Y)$, on a

$$\begin{aligned}
(g, g').\,(w(\varphi \otimes \psi)) \left(\sum_{i,j} c_i \otimes c'_j \right) &= w(\varphi \otimes \psi) \left((g, g').\sum_{i,j} c_i \otimes c'_j \right) \\
&= w(\varphi \otimes \psi) \left(\sum_{i,j} g.c_i \otimes g'.c'_j \right) \\
&= \sum_{i,j} \varphi(g.c_i) \cdot \psi(g'.c'_j) \\
&= \sum_{i,j} (g.\varphi)(c_i) \cdot (g'.\psi)(c'_j) \\
&= w(g.\varphi \otimes g'.\psi) \left(\sum_{i,j} c_i \otimes c'_j \right) \\
&= w\left((g, g').(\varphi \otimes \psi)\right) \left(\sum_{i,j} c_i \otimes c'_j \right).
\end{aligned}$$

□

7.3 Produits de filtrations par le poids équivariantes

Soient X une G-variété algébrique réelle de $\mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$ et Y une G'-variété algébrique réelle de $\mathbf{Sch}_c^{G'}(\mathbb{R})$.

On souhaite appliquer le foncteur L au quasi-isomorphisme filtré équivariant

$$ {}^{G}\mathcal{G}C_*(X) \otimes {}^{G'}\mathcal{G}C_*(Y) \to {}^{G\times G'}\mathcal{G}C_*(X \times Y) $$

afin d'obtenir un quasi-isomorphisme de $\mathcal{C}_-$

$$ \Lambda C_*^{G}(X) \otimes \Lambda C^{G'}(Y) \to \Lambda C^{G\times G'}(X \times Y). $$

Pour cela, il nous faut tout d'abord montrer que les complexes $L^{G}\left({}^{G}\mathcal{G}C_*(X)\right) \otimes L^{G'}\left({}^{G'}\mathcal{G}C_*(Y)\right)$ et $L^{G\times G'}\left({}^{G}\mathcal{G}C_*(X) \otimes {}^{G'}\mathcal{G}C_*(Y)\right)$ sont (au moins) quasi-isomorphes dans $\mathcal{C}_-$. En considérant une résolution projective particulière pour les groupes G et G', on va en fait montrer que ces deux complexes filtrés sont isomorphes dans $\mathcal{C}_-$.

On va même prouver quelque chose de plus général, à savoir que si K est un G-complexe filtré et M un G'-complexe filtré, alors les complexes filtrés $L^{G}(K) \otimes L^{G'}(M)$ et $L^{G\times G'}(K \otimes M)$ sont naturellement isomorphes ainsi que leurs filtrations, si l'on considère des résolutions projectives particulières pour G et G'.

Le premier fait notable que nous utiliserons à cette fin est que l'on peut construire une résolution projective pour $G \times G'$ à partir d'une résolution projective pour G et une résolution projective pour G' :

Proposition 7.3.1. ([6] Chapter V - 1) *Si F et F' sont des résolutions projectives de $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}_2$) sur $\mathbb{Z}[G]$ et $\mathbb{Z}[G']$ respectivement (resp. $\mathbb{Z}_2[G]$ et $\mathbb{Z}_2[G']$ respectivement), alors $F \otimes F'$ est une résolution projective de $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}_2$) sur $\mathbb{Z}[G \times G']$ (resp. $\mathbb{Z}_2[G \times G']$).*

Soient K un G-complexe et M un G'-complexe. En utilisant la propriété précédente et la suivante, il nous sera alors possible de relier (par un isomorphisme) $L^{G}(K) \otimes L^{G'}(M)$ et $L^{G\times G'}(K \otimes M)$, dans la mesure où l'on considère des résolutions projectives "libres de type fini" pour les groupes considérés.

Proposition 7.3.2. ([30] Chapter VI - 8, (8.10) et Proposition 8.3) *Soient B un $\mathbb{Z}[G]$-module (resp. $\mathbb{Z}_2[G]$-module) libre de type fini, B' un $\mathbb{Z}[G']$-module (resp. $\mathbb{Z}_2[G]$-module) libre de type fini, A un $\mathbb{Z}[G]$-module (resp. $\mathbb{Z}_2[G]$-module) et A' un $\mathbb{Z}[G']$-module (resp. $\mathbb{Z}_2[G]$-module).*

Alors le morphisme canonique

$$ \psi : \begin{array}{ccc} Hom_G(B, A) \otimes Hom_{G'}(B', A') & \to & Hom_{G\times G'}(B \otimes B', A \otimes A') \\ f \otimes f' & \mapsto & \{\ b \otimes b' \mapsto f(b) \otimes f(b')\ \} \end{array} $$

est un isomorphisme.

Afin d'obtenir l'isomorphisme $L^{G}(K) \otimes L^{G'}(M)$ et $L^{G\times G'}(K \otimes M)$, il nous suffit donc de trouver, pour la contruction des foncteurs L, des résolutions dont les termes sont libres de type fini. Les résolutions bar que l'on définit ci-après vont jouer ce rôle. En effet, nos groupes étant finis, les modules composant celles-ci vont être libres de type fini.

Définition et Proposition 7.3.3. ([7]) *Soit G un groupe et soit k un anneau commutatif unitaire. Pour $n \geq 0$, on pose*

$$B_n := k[G] \otimes_k \cdots \otimes_k k[G]$$

le produit tensoriel de $n+1$ copies de $k[G]$. En faisant agir G sur le premier terme $k[G]$ de B_n, celui-ci devient un $k[G]$-module, libre, engendré par les éléments $1 \otimes g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_n$.

En définissant

$$\epsilon : B_0 = k[G] \to k \ ; \ \sum_{g \in G} a_g g \mapsto \sum a_g,$$

et pour tout $n \geq 1$,

$$\partial_n : B_n \to B_{n-1} \ ; \ g_0 \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_n \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i g_0 \otimes \cdots \otimes g_i g_{i+1} \otimes \cdots \otimes g_n + (-1)^n g_0 \otimes \cdots \otimes g_{n-1},$$

on obtient une résolution de k par des $k[G]$-modules libres

$$\cdots \to B_2 \xrightarrow{\partial_2} B_1 \xrightarrow{\partial_1} B_0 \xrightarrow{\epsilon} k \to 0,$$

appelée résolution bar de G sur k.

Remarque 7.3.4. Si le groupe G est fini, chaque B_n est un $k[G]$-module libre de type fini, de base formée des éléments $1 \otimes g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_n$.

Reprenons donc nos groupes finis G et G'. On note B_* et B'_* les résolutions bar de G et G' respectivement sur $\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{Z}_2$). En vertu de 7.3.1, $B_* \otimes B'_*$ est une résolution projective pour le groupe produit $G \times G'$. De plus, comme les modules composant les résolutions bar sont libres de type fini, on peut utiliser 7.3.2 pour montrer :

Proposition 7.3.5. *Soient K_* un G-complexe de $\mathcal{D}^G$ et M_* un G'-complexe de $\mathcal{D}^{G'}$. Alors*

$$L_B^G(K_*) \otimes L_{B'}^{G'}(M_*) \cong L_{B \otimes B'}^{G \times G'}(K_* \otimes M_*),$$

en tant que complexes de $\mathcal{D}_-$.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\begin{aligned}
\left(L_*^G(K_*) \otimes L_*^{G'}(M_*)\right)_k &= \bigoplus_{i+j=k} L_i^G(K_*) \otimes L_j^{G'}(M_*) \\
&= \bigoplus_{i+j=k} \left(\oplus_{p+q=i} Hom_G(B_{-p}, K_q)\right) \otimes \left(\oplus_{p'+q'=j} Hom_G(B'_{-p'}, M_{q'})\right) \\
&= \bigoplus_{i+j=k} \left(\bigoplus_{p+q=i, p'+q'=j} Hom_G(B_{-p}, K_q) \otimes Hom_G(B'_{-p'}, M_{q'}) \right) \\
&\cong \bigoplus_{i+j=k} \bigoplus_{p+q=i, p'+q'=j} Hom_{G \times G'}(B_{-p} \otimes B'_{-p'}, K_q \otimes M_{q'}) \\
&= \bigoplus_{i,p,q'} Hom_{G \times G'} \left(B_{-p} \otimes B'_{-(k-i-q')}, K_{i-p} \otimes M_{q'} \right)
\end{aligned}$$

(tous les B_n et $B'_{n'}$ sont libres de type fini).

D'un autre côté, on a :

$$\begin{aligned}
L_k^{G\times G'}(K_*\otimes M_*) &= \bigoplus_{r+s=k} Hom_{G\times G'}\left((B\otimes B')_{-r},(K_*\otimes M_*)_s\right)\\
&= \bigoplus_{r+s=k} Hom_{G\times G'}\left(\bigoplus_{-p-p'=-r}(B_{-p}\otimes B'_{-p'}),\bigoplus_{q+q'=s}(K_q\otimes M_{q'})\right)\\
&= \bigoplus_{r+s=k}\bigoplus_{-p-p'=-r}\bigoplus_{q+q'=s} Hom_{G\times G'}\left((B_{-p}\otimes B'_{-p'}),(K_q\otimes M_{q'})\right)\\
&= \bigoplus_{r,p,q'} Hom_{G\times G'}\left((B_{-p}\otimes B'_{-(r-p)}),(K_{k-r-q'}\otimes M_{q'})\right)\\
&= \bigoplus_{i,p,q'} Hom_{G\times G'}\left((B_{-p}\otimes B'_{-(k-i-q')}),(K_{i-p}\otimes M_{q'})\right)
\end{aligned}$$

(en posant $i := k-r-q'+p$).

Ainsi, pour tout k, on a un isomorphisme (naturel)

$$(L_*^G(K_*)\otimes L_*^{G'}(M_*))_k \cong L_k^{G\times G'}(K_*\otimes M_*)$$

Comparons maintenant les différentielles de ces deux complexes. On note ∂_* la différentielle de K_*, ∂'_* celle de M_*, Δ_* celle de B_*, Δ'_* celle de B'_*, δ_* celle de $L_*^G(K_*)$, δ'_* celle de $L_*^{G'}(M_*)$, D_* celle de $L_*^G(K_*)\otimes L_*^{G'}(M_*)$ et d_* celle de $L_*^{G\times G'}(K_*\otimes M_*)$.

Soit $u=\sum u_i\otimes u'_j \in (L_*^G(K_*)\otimes L_*^{G'}(M_*))_k = \bigoplus_{i+j=k} L_i^G(K_*)\otimes L_j^{G'}(M_*)$, avec pour tous i,j, $u_i=\sum u_i^{p,q}\in \oplus_{p+q=i}Hom_G(B_{-p},K_q)$ et $u'_j=\sum {u'_j}^{p',q'}\in\oplus_{p'+q'=j}Hom_G(B'_{-p'},M_{q'})$ alors

$$\begin{aligned}
D_k(u) &= \sum_{i,j}\left(\delta_i(u_i)\otimes u'_j + u_i\otimes\delta'_j(u'_j)\right)\\
&= \sum_{i,j}\left(\left(\sum_{p,q}(u_i^{p,q}\circ\Delta_{-p+1}+\partial_q\circ u_i^{p,q})\right)\otimes\left(\sum_{p',q'}{u'_j}^{p',q'}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\left(\sum_{p,q}u_i^{p,q}\right)\otimes\left(\sum_{p',q'}\left({u'_j}^{p',q'}\circ\Delta'_{-p'+1}+\partial_{q'}\circ{u'_j}^{p',q'}\right)\right)\right)\\
&= \sum_{i,j}\left(\left(\sum_{p,q,p',q'}u_i^{p,q}\circ\Delta_{-p+1}\otimes{u'_j}^{p',q'}+\partial_q\circ u_i^{p,q}\otimes{u'_j}^{p',q'}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\left(\sum_{p,q,p',q'}u_i^{p,q}\otimes{u'_j}^{p',q'}\circ\Delta'_{-p'+1}+u_i^{p,q}\otimes\partial'_{q'}\circ{u'_j}^{p',q'}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$=\sum_{i,j,p,q,p',q'}\left(u_i^{p,q}\circ\Delta_{-p+1}\otimes{u'_j}^{p',q'}+\partial_q\circ u_i^{p,q}\otimes{u'_j}^{p',q'}+u_i^{p,q}\otimes{u'_j}^{p',q'}\circ\Delta'_{-p'+1}+u_i^{p,q}\otimes\partial'_{q'}\circ{u'_j}^{p',q'}\right).$$

Pour tout k, on note ψ_k l'isomorphisme $(L_*^G(K_*) \otimes L_*^{G'}(M_*))_k \to L_k^{G\times G'}(K_* \otimes M_*)$, induit par les isomorphismes naturels

$$\psi : Hom_G(B_{-p}, K_q) \otimes Hom_G(B'_{-p'}, M_{q'}) \to Hom_{G\times G'}(B_{-p} \otimes B'_{-p'}, K_q \otimes M_{q'}).$$

Alors $\psi_{k-1}(D_k(u)) =$

$$\sum \left(\psi\left(u_i^{p,q} \circ \Delta_{-p+1} \otimes {u'_j}^{p',q'}\right) + \psi\left(\partial_q \circ u_i^{p,q} \otimes {u'_j}^{p',q'}\right) + \psi\left(u_i^{p,q} \otimes {u'_j}^{p',q'} \circ \Delta'_{-p'+1}\right) + \psi\left(u_i^{p,q} \otimes \partial'_{q'} \circ {u'_j}^{p',q'}\right)\right)$$

Calculons maintenant $d_k\left(\psi_k(u)\right)$.

On a $u = \sum_{i,j}\left(\sum_{p,q} u_i^{p,q}\right) \otimes \left(\sum_{p',q'} {u'_j}^{p',q'}\right) = \sum_{i,j,p,q,p',q'} u_i^{p,q} \otimes {u'_j}^{p',q'}$

$$= \sum_{r+s=k,-p-p'=-r,q+q'=s} u_{k-r-q'-p}^{p,q} \otimes {u'_{r+q'+p}}^{p',q'}$$

donc $\psi_k(u) = \sum_{r,s,p,p',q,q'} \psi\left(u_{k-r-q'-p}^{p,q} \otimes {u'_{r+q'+p}}^{p',q'}\right)$

$$= \sum_{r+s=k}\left(\sum_{-p-p'=-r,q+q'=s} \psi\left(u_{k-r-q'-p}^{p,q} \otimes {u'_{r+q'+p}}^{p',q'}\right)\right)$$

avec, pour tous r et s tels que $r+s=k$,

$$\psi_{r,s} := \sum_{-p-p'=-r,\ q+q'=s} \psi\left(u_{k-r-q'-p}^{p,q} \otimes {u'_{r+q'+p}}^{p',q'}\right) \in Hom_{G\times G'}\left((B\otimes B')_{-r}, (K_* \otimes M_*)_s\right).$$

Alors

$$d_k\left(\psi_k(u)\right) = \sum_{r+s=k} d_k\left(\psi_{r,s}\right)$$

où si $v \in Hom_{G\times G'}\left((B\otimes B')_{-r}, (K_* \otimes M_*)_s\right)$,

$$d_k(v) = v \circ (\Delta \otimes \Delta')_{-r+1} + (\partial \otimes \partial')_s \circ v.$$

Or, pour tous r et s tels que $r+s=k$, on a

$$\psi_{r,s} \circ (\Delta \otimes \Delta')_{-r+1} = \sum_{p,p',q,q'} \left(\psi\left(u_{k-r-q'-p}^{p,q} \circ \Delta_{-p+1} \otimes {u'_{r+q'+p}}^{p',q'}\right) + \psi\left(u_{k-r-q'-p}^{p,q} \otimes {u'_{r+q'+p}}^{p',q'} \circ \Delta_{-p'+1}\right)\right)$$

et

$$(\partial \otimes \partial')_s \circ \psi_{r,s} = \sum_{p,p',q,q'} \left(\psi\left(\partial_q \circ u_{k-r-q'-p}^{p,q} \otimes {u'_{r+q'+p}}^{p',q'}\right) + \psi\left(u_{k-r-q'-p}^{p,q} \otimes \partial_{q'} \circ {u'_{r+q'+p}}^{p',q'}\right)\right).$$

La quantité $d_k\left(\psi_k(u)\right)$ est donc égale au morphisme

$$\sum_{r,s,p,p',q,q'} \left(\psi\left(u^{p,q}_{k-r-q'-p} \circ \Delta_{-p+1} \otimes {u'_{r+q'+p}}^{p',q'}\right) + \psi\left(u^{p,q}_{k-r-q'-p} \otimes {u'_{r+q'+p}}^{p',q'} \circ \Delta_{-p'+1}\right)\right.$$

$$\left.+\psi\left(\partial_q \circ u^{p,q}_{k-r-q'-p} \otimes {u'_{r+q'+p}}^{p',q'}\right) + \psi\left(u^{p,q}_{k-r-q'-p} \otimes \partial_{q'} \circ {u'_{r+q'+p}}^{p',q'}\right)\right)$$

qui, en posant $i = k - r - q' - p$ et $j = r + q' + p$, est égal à $\psi_{k-1}(D_k(u))$.

$\psi_* : (L^G_*(K_*) \otimes L^{G'}_*(M_*))_* \to L^{G\times G'}_*(K_* \otimes M_*)$ est donc un isomorphisme de complexes.

□

Si l'on considère à présent des complexes filtrés, le morphisme ψ_* devient un isomorphisme de complexes filtrés :

Proposition 7.3.6. *Soient $JK_* \in \mathcal{C}^G$ et $IM_* \in \mathcal{C}^{G'}$. Alors les filtrations des complexes filtrés $L^G_B(JK_*) \otimes L^{G'}_{B'}(IM_*)$ et $L^{G\times G'}_{B\otimes B'}(JK_* \otimes IM_*)$ sont naturellement isomorphes.*

Démonstration. La filtration sur $L^G_B(JK_*) \otimes L^{G'}_{B'}(IM_*)$ est donnée par

$$\begin{aligned}
(\mathcal{J} \otimes \mathcal{I})_l(L^G_*(K_*) \otimes L^{G'}_*(M_*))_k &= \bigoplus_{i+j=k} \sum_{a+b=l} \mathcal{J}_a L^G_i(K_*) \otimes \mathcal{I}_b L^{G'}_j(M_*) \\
&= \sum_{a+b=l} \bigoplus_{i+j=k} L^G_i(J_a K_*) \otimes L^{G'}_j(I_b M_*) \\
&\cong \sum_{a+b=l} L^{G\times G'}_k(J_a K_* \otimes I_b M_*) \\
&= L^{G\times G'}_k\left(\sum_{a+b=l} J_a K_* \otimes I_b M_*\right) \\
&= L^{G\times G'}_k\left((J_\otimes I)_l(K_* \otimes IM_*)\right)
\end{aligned}$$

qui décrit la filtration sur $L^{G\times G'}_{B\otimes B'}(JK_* \otimes IM_*)$. L'avant-dernière égalité est vérifiée car les modules $B_l \otimes B'_m$ sont libres de type fini sur $\mathbb{Z}_2[G \times G']$.

En effet, si A est un R-module libre de type fini, et $(A_i)_{\in I}$ un ensemble fini de R-modules libres, on a l'égalité

$$\sum_{i\in I} Hom_R(A, A_i) = Hom_R\left(A, \sum_{i\in I} A_i\right).$$

Dans ces conditions, le morphisme $\psi_* : L^G_B(JK_*) \otimes L^{G'}_{B'}(IM_*) \to L^{G\times G'}_{B\otimes B'}(JK_* \otimes IM_*)$ est donc un isomorphisme de $\mathcal{C}_-$. □

Cette propriété nous indique qu'il nous suffit d'appliquer le foncteur $L^{G\times G'}_{B\otimes B'}$ au quasi-isomorphisme 7.2.7 pour obtenir :

Théorème 7.3.7. *Soient $X \in \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathbf{Sch}_c^{G'}$. On a un quasi-isomorphisme de $\mathcal{C}_-$:*

$$\Lambda C_*^G(X) \otimes \Lambda C^{G'}(Y) \to \Lambda C^{G\times G'}(X \times Y)$$

Démonstration. On considère le quasi-isomorphisme de $\mathcal{C}^{G\times G'}$:

$$u : {}^G\mathcal{G}C_*(X) \otimes {}^{G'}\mathcal{G}C_*(Y) \to {}^{G\times G'}\mathcal{G}C_*(X \times Y)$$

On lui applique alors le foncteur $L_{B\otimes B'}^{G\times G'}$ qui préserve les quasi-isomorphismes. On obtient ainsi un quasi-isomorphisme de $\mathcal{C}_-$

$$L_{B\otimes B'}^{G\times G'}\left({}^G\mathcal{G}C_*(X) \otimes {}^{G'}\mathcal{G}C_*(Y)\right) \to L_{B\otimes B'}^{G\times G'}\left({}^{G\times G'}\mathcal{G}C_*(X \times Y)\right)$$

que l'on compose ensuite avec l'isomorphisme naturel de $\mathcal{C}_-$

$$L_B^G\left({}^G\mathcal{G}C_*(X)\right) \otimes L_{B'}^{G'}\left({}^{G'}\mathcal{G}C_*(Y)\right) \to L_{B\otimes B'}^{G\times G'}\left({}^G\mathcal{G}C_*(X) \otimes {}^{G'}\mathcal{G}C_*(Y)\right).$$

□

Remarque 7.3.8. Les complexes filtrés $L^G\left({}^G\mathcal{G}C_*(X)\right)\otimes L^{G'}\left({}^{G'}\mathcal{G}C_*(Y)\right)$ et $L^{G\times G'}\left({}^{G\times G'}\mathcal{G}C_*(X \times Y)\right)$ sont quasi-isomorphes dans $\mathcal{C}_-$ quelques soient les résolutions projectives choisies pour G, G', $G \times G'$.

En effet, tout d'abord, le foncteur $L^{G\times G'} : \mathcal{C}^{G\times G'} \to H \circ \mathcal{C}_-$ est indépendant de la résolution projective choisie pour $G \times G'$.

Ensuite, si F et F' sont des résolutions projectives quelconques pour G et G' respectivement, et si K_* est un G-complexe et M_* un G'-complexe, les complexes filtrés $L_F^G(K_*) \otimes L_{F'}^{G'}(M_*)$ et $L_B^G(K_*) \otimes L_{B'}^{G'}(M_*)$ sont quasi-isomorphes dans $\mathcal{C}_-$. En effet, si l'on calcule la suite spectrale induite par ces complexes filtrés, on a, par 7.1.6,

$$E_{a,b}^r \cong \bigoplus_{p+s=a, q+t=b} E_{p,q}^r(L_*^G(K_*)) \otimes E_{s,t}^r(L^{G'}(M_*))$$

or les suites spectrales $E(L_*^G(K_*))$ et $E(L^{G'}(M_*))$ sont indépendantes des résolutions projectives respectives choisies à partir de $r \geq 1$.

Corollaire 7.3.9. *Les complexes $\Omega C_*^G(X)\otimes\Omega C^{G'}(Y)$ et $\Omega C^{G\times G'}(X\times Y)$ sont quasi-isomorphes dans $\mathcal{C}_-$ et on a un isomorphisme filtré*

$$\Omega H_*(X; G) \otimes \Omega H_*(Y; G') \to \Omega H_*(X \times Y; G \times G')$$

par rapport aux filtrations par le poids équivariantes.

Des calculs semblables dans le contexte cohomologique nous donne des résultats similaires sur le produit de complexes de poids équivariants :

Proposition 7.3.10. *Soient* $X \in \mathbf{Sch}_c^G(\mathbb{R})$ *et* $Y \in \mathbf{Sch}_c^{G'}$. *Les complexes filtrés* $\Lambda C_G^*(X) \otimes \Lambda C_{G'}^*(Y)$ *et* $\Lambda C_{G\times G'}^*(X \times Y)$ *sont quasi-isomorphes dans* $\mathfrak{C}_+$.

Ainsi, les complexes $\Omega C_G^*(X) \otimes \Omega C_{G'}^*(Y)$ *et* $\Omega C_{G\times G'}^*(X \times Y)$ *sont quasi-isomorphes dans* $\mathfrak{C}_+$ *et on a un isomorphisme filtré*

$$\Omega H^*(X; G) \otimes \Omega H^*(Y; G') \to \Omega H^*(X \times Y; G \times G')$$

par rapport aux filtrations par le poids cohomologiques équivariantes.

Démonstration. Les complexes ${}^G\mathcal{G}C^*(X) \otimes {}^{G'}\mathcal{G}C^*(Y)$ et ${}^{G\times G'}\mathcal{G}C^*(X \times Y)$ sont quasi-isomorphes dans $\mathfrak{C}^G$. On applique alors le foncteur $L_{G\times G'}$ et on utilise le fait que si $JK^* \in \mathfrak{C}^G$ et $IM^* \in \mathfrak{C}^{G'}$, les complexes filtrés $L_G(JK^*) \otimes L_{G'}(IM^*)$ et $L_{G\times G'}(JK^* \otimes IM^*)$ sont naturellement isomorphes dans $\mathfrak{C}_+$ (on le montre en faisant des calculs identiques à ceux du cadre homologique 7.3.5, 7.3.6) pour obtenir un isomorphisme entre $\Lambda C_G^*(X) \otimes \Lambda C_{G'}^*(Y)$ et $\Lambda C_{G\times G'}^*(X \times Y)$ dans $H \circ \mathfrak{C}_+$. $\square$

Remarque 7.3.11. Dans [21], après avoir traité la question du produit des filtrations par le poids réelles, T. Limoges s'intéresse à leur compatibilité avec le produit cup et le produit cap. Il montre ainsi que les produit cup et cap sont des applications filtrées par rapport à la filtration par le poids.

Il serait intéressait de savoir, après ce que nous venons de voir sur les produits de filtrations par le poids réelles équivariantes, si celles-ci sont également compatibles avec un certain produit cup et un certain produit cap sur les homologie et cohomologie équivariantes que nous avons considérées.

Bibliographie

[1] D. Abramovich, K. Karu, K. Matsuki, J. Włodarczyk, *Torification and factorization of birational maps*, J. Amer. Math. Soc. **29** (2002), 531-572.

[2] E. Bierstone, P. D. Milman, *Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant*, Invent. Math. **128** (1997), no.2, 207-302.

[3] F. Bittner, *The universal Euler characteristic for varieties of characteristic zero*, Compositio Mathematica **140** (2004), 1011-1032.

[4] J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy, *Real Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[5] I. Bonnard, *Nash constructible functions*, Manuscripta Math. **112** (2003), 55-75.

[6] K.S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate texts in Mathematics, **87**, Springer-Verlag, 1982.

[7] J.F. Carlson, L. Townsley, L. Valero-Elizondo, M. Zhang, *Cohomology Rings of Finite Groups with an Appendix : Calculations of Cohomology Rings of Groups of Order Dividing 64*, Algebra and Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[8] P. Deligne, *Poids dans la cohomologie des variétés algébriques*, Proc. Int. Cong. Math. Vancouver (1974), 79-85.

[9] J. Denef, F. Loeser, *Motivic Igusa zeta functions*, J. Algebraic Geom. **7** (1998), no. 3, 505-537.

[10] D. Derval, *Etude des classes de cohomologie algébrique des variétés algébriques réelles*, Thèse de Doctorat, Université de Rennes 1, 2001.

[11] G. Fichou, *Motivic invariants of arc-symmetric sets and blow-nash equivalence*, Compositio Math. **141** (2005) 655-688.

[12] G. Fichou, *Equivariant virtual Betti numbers*, Ann. de l'Inst. Fourier, **58**, no. 1 (2008), 1-27.

[13] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku math. J. **9** (1970), no. 2, 143-162.

[14] F. Guillén, V. Navarro Aznar, *Un critère d'extension des foncteurs définis sur les schémas lisses*, IHES Publ. Math. **95** (2002), 1-83.

[15] F. Guillén, V. Navarro Aznar, P. Pascual-Gainza, F. Puerta, *Hyperrésolutions cubiques et descente cohomologique*, Lectures Notes in Math., **1335**, Springer-Verlag, 1988.

[16] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Ann. Math. **79** (1964), no. 2, 109-326.

[17] D. Husemöller, *Fiber Bundles*, Third Ed., Springer, New-York, 1994.

[18] K. Kurdyka, *Ensembles semi-algébriques symétriques par arcs*, Math. Ann. **281** (1988), 445-462.

[19] K. Kurdyka, A. Parusiński, *Arc-symmetric sets and arc-analytic mappings*, Panoramas et Synthèses **24**, Soc. Math. France (2007), 33-67.

[20] J.M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Springer-Verlag, New-York, 2003.

[21] T. Limoges, *Cohomology and products of real weight filtrations*, prépublication.

[22] S. López de Medrano, *Involutions on manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[23] J. McCleary, *A user's guide to spectral sequences*, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 58, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[24] C. McCrory, A. Parusiński, *Algebraically constructible functions*, Ann. Sci. cole Norm. Sup. **30** (1997), 527-552.

[25] C. McCrory, A. Parusiński, *Virtual Betti numbers of real algebraic varieties*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **336** (2003), no. 9, 763-768.

[26] C. McCrory, A. Parusiński, *The weight filtration for real algebraic varieties*, Topology of stratified spaces, 121-160, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **58**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011.

[27] G. Mikhalkin, *Birational equivalence for smooth manifolds with boundary*, (Russian) Algebra i Analiz 11 (1999), no. 5, 152-165 ; translation in St. Petersburg Math. J. 11 (2000), no. 5, 827-836.

[28] C. Peters, J. Steenbrink, *Mixed Hodge Structures*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2008.

[29] C. Procesi, G. Schwarz, *Inequalities defining orbit spaces*, Invent. Math. **81** (1985), 539-554.

[30] S. Mac Lane, *Homology*, Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[31] M. Shiota, *Nash manifolds*, Lectures Notes in Math., **1269**, Springer-Verlag, 1987.

[32] R. Thom, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Comm. Math. Helv. **28** (1954), 17-86.

[33] A. Tognoli, *Su una congettura di Nash*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Sci. Fis. Mat (3) **27**, 167-185 (1973).

[34] B. Totaro, *Topology of singular algebraic varieties*, Proc. Int. Cong. Math. Beijing (2002), 533-541.

[35] J. van Hamel, *Algebraic cycles and topology of real algebraic varieties*, CWI Tract 129, Stichting Mathematisch Centrum, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1997.

[36] C. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **38**, Cambridge University Press, 1994.